

DIVERSÕES MATEMÁTICAS COM NÚMEROS E CARTAS

Filipe Didelet
Francisco Sena



AUTORES

Filipe José Didelet Pereira
Francisco Manuel Vicente Sena

TÍTULO

DIVERSÕES MATEMÁTICAS COM NÚMEROS E CARTAS

EDIÇÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Tel. 220939053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA

Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO

Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220104872 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN

Delineatura – Design de Comunicação · www.delineatura.pt

APOIO

Grupo Rolear · www.rolear.pt

IMPRESSÃO

setembro, 2026

Depósito Legal

568286/26



A cópia ilegal viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2026 | Todos os direitos reservados a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, é ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU
51 – Matemática

ISBN
Papel: 9789899305403
Ebook: 9789899305410

Catalogação da publicação
Família: Bases de Engenharia
Subfamília: Matemática

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	9
PARTE I – PROBLEMAS ESTRITAMENTE NUMÉRICOS.....	11
I – Adivinhar a idade.....	13
II – Adivinhar a data de nascimento.....	15
III – Encontrar o anel	17
IV – 10890 sempre!.....	19
V – Adivinhar o número de telemóvel.....	21
VI – Adivinhar um número pensado utilizando quadrados	23
VII – Adivinhar três algarismos pensados em sequência	25
VIII – Produtos extensos	29
IX – Adivinhar a idade do outro e o número de moedas que tem na carteira	33
X – Referências pessoais	35
XI – Adivinhar o número.....	37
XII – Adivinhar dois números ao acaso (ou nem tanto...)	39

XIII – Adivinhar uma determinada quantidade de números pensados por uma pessoa.....	41
XIV – Truque para adivinhar a data exata de nascimento.....	45
XV – Descodificação de um número de 7 algarismos em que o central é par ou ímpar.....	49
XVI – A página e a palavra oculta num livro.....	53
XVII – Múltiplos de nove.....	57
XVIII – Adivinhar em qual dos bolsos uma pessoa tem um determinado número de moedas.....	61
XIX – Rotação de um dado normal e surpresas matemáticas.....	65
XX – Adivinhar o valor obtido com um lançamento de dado.....	69
XXI – Adivinha de resultado com lançamento de três dados.....	71
XXII – Adivinha de resultado com lançamento de três dados (outra versão).....	73
XXIII – Adivinhar uma sequência de cinco dados.....	77
XXIV – Adivinhar uma sequência de quatro dados.....	79
XXV – Dois lançamentos de dois dados com repetição.....	83

PARTE II – PROBLEMAS COM RECURSO A BARALHOS DE CARTAS.....85

I – Carta imaginária.....	89
II – O jogo de cartas em pares.....	93
III – Dados e cartas.....	97
IV – Sequências de De Bruijn.....	101
V – Duplicação de um par binário desconhecido.....	111
VI – Adivinhação de cartas ordenadas.....	113
VII – Separação de cartas.....	115
VIII – Princípio do MDC = 1.....	119
IX – Uma aplicação do princípio de Miraskill.....	121
X – Completar os valores.....	123
XI – Adivinhar as cartas pensadas.....	125
XII – Adivinhar duas cartas pensadas por uma pessoa.....	129
XIII – Adivinhar quatro cartas pensadas por uma pessoa.....	131
XIV – Pensar numa carta de um baralho de 52 cartas.....	135
XV – Adivinhar a soma de pontos de cartas desconhecidas.....	139
XVI – A contagem australiana (“Down under Deal” ou “Under Down Deal”).....	147
XVII – Aplicação do problema de Josefo com cartas.....	155

XVIII – Método das 33 cartas	163
XIX – Adivinhar cartas numeradas de 1 a 20.....	165
XX – As cinco cartas do mesmo naipe	171
XXI – Adivinhação de carta pelo OU exclusivo (XOR)	175
XXII – Princípio da matriz.....	179
XXIII – Disposição da sequência inicial do baralho de cartas	185
XXIV – “Faro out”, “Faro in” e “AntiFaro”	189
XXV – Alguns problemas adicionais.....	195
 BIBLIOGRAFIA.....	 CCV

Adivinhar a idade

Este é um dos mais simples problemas que se podem incluir no tipo de problemas de adivinhação de números. Pretendemos mostrar que conseguimos adivinhar a idade de qualquer pessoa. Para o conseguirmos, pedimos à pessoa em causa que, sem o declarar, vá efetuando uma série de cálculos a partir do número que representa a sua idade.

Assim, vamos pedindo para:

- 1 – multiplicar por 2 o valor da idade;
- 2 – somar 2 ao resultado
- 3 – multiplicar tudo por 5
- 4 – somar 150.

Finalmente, pedimos para nos indicar qual o resultado final que obteve.

Exemplificando, para alguém com 75 anos de idade:

$$1 - 75 \times 2 = 150$$

$$2 - 150 + 2 = 152$$

Após a inscrição dos 4 números, “A” pede a “B” que, recorrendo à máquina de calcular, multiplique os números da coluna da esquerda um pelo outro, faça o mesmo com os da direita e some os dois produtos assim obtidos.

Entretanto, e enquanto “B” está a efetuar os cálculos na máquina de calcular, “A” apresenta o resultado pretendido, deixando “B” admirado com a sua destreza na obtenção do resultado para um produto tão extenso.

Através da apresentação de dois exemplos, vamos verificar como “B” consegue obter o resultado de forma tão rápida.

Exemplo 1

321431 321431
532141 467858

Repare-se que $532141 + 467858 = 999999$.

O que faz “A”:

- a) $321431 - 1 = 321430$
- b) $999999 - 321430 = 678569$
- c) Resultado pretendido será 321430678569

Na calculadora, “B” pretende efetuar $321431 \times 532141 + 321431 \times 467858$.

Exemplo 2

435879 435879
532141 467858

- a) $435879 - 1 = 435878$
- b) $999999 - 435878 = 564121$
- c) Resultado pretendido será 435878564121

Na calculadora, “B” pretenderá efetuar $435879 \times 532141 + 435879 \times 467858$.

Vai-se agora demonstrar que este resultado pode ser obtido para qualquer par de números de 6 algarismos, ou seja, o par de números arbitrários indicados por “B” para a 1ª coluna já que, na 2ª coluna, o número de cima é igual ao 1º número indicado e, na linha de baixo o número será igual a 999999 subtraído do 2º número indicado por “B”. Teremos, assim, e representando o par de números por N1 e N2, respetivamente:

- d) O próximo algarismo é dado por ímpar e ímpar; logo, $6+9 = 15$ e, deste modo, o último algarismo será 5.

Até agora temos 9463XX5

Vamos ver a segunda fase.

Nesta segunda fase, os assinalados por X serão decodificados do seguinte modo:

- a) O X da esquerda é obtido subtraindo 1 do 1º algarismo do número;
- b) O X da direita é obtido subtraindo 1 do último algarismo do número.

E então:

- a) O algarismo do X à esquerda é obtido por: $9-1 = 8$;
- b) O algarismo do X à direita é obtido por: $5-1 = 4$.

Assim, e finalmente, temos o número decodificado.

Passada a exemplificação e exposição do problema, deve-se frisar que as ações da segunda fase do problema resultam diretamente das propriedades dos números de Leo Boudreau, o mesmo se devendo dizer do algarismo central, 2 ou 3. Para nos apercebermos melhor destas propriedades, podemos ver uma tabela (tabela 1) de trinta números de Leo Boudreau, retirada de "themagiccafe.com" (2024.06.26).

De notar, ainda que, e principalmente no que respeita às regras da segunda fase, os números podem ser gerados, retirando outros valores aos algarismos dos extremos, por exemplo, 2 em vez de 1.

Tabela 1. Tabela de números de Leo Boudreau

1593067,	5072401,	9463812,	6802501
9372845,	8593756,	4163389,	1502034
8072723,	7293690,	3802289,	7163690
5072478,	8502756,	2463190,	2463190
8593723,	1502067,	6372534,	2463167
1593034,	3802256,	8072756,	4163312
6802534,	7293623,	9463845,	8502723
9372812,	7163623		

soma com o novo vértice e verifique-se que o valor é diferente assim como a paridade (ou seja, se o valor obtido com a soma em 1) era ímpar, o que se obteve em 2) será par e vice-versa). Será assim sempre que se fizer uma rotação de 90° . Se fizermos duas rotações sucessivas, será reposta a (im)paridade mas o valor variará.

Podemos representar o processo por intermédio de um grafo como o que está representado na figura seguinte.

De acordo com o grafo, se estivermos, por exemplo, no vértice cujas faces formam, somadas, o valor 9, se rodarmos o dado 90° , podemos passar a qualquer um dos vértices cujas faces somem 6, 10 ou 14 e podemos verificar que a paridade passou sempre de ímpar a par.

Podemos verificar o mesmo começando agora com um vértice de paridade par. Seja, por exemplo, 10 e sigamos o mesmo processo; iremos obter outros três vértices, todos de paridade ímpar, e cujas faces somadas serão 7, 9 ou 15.

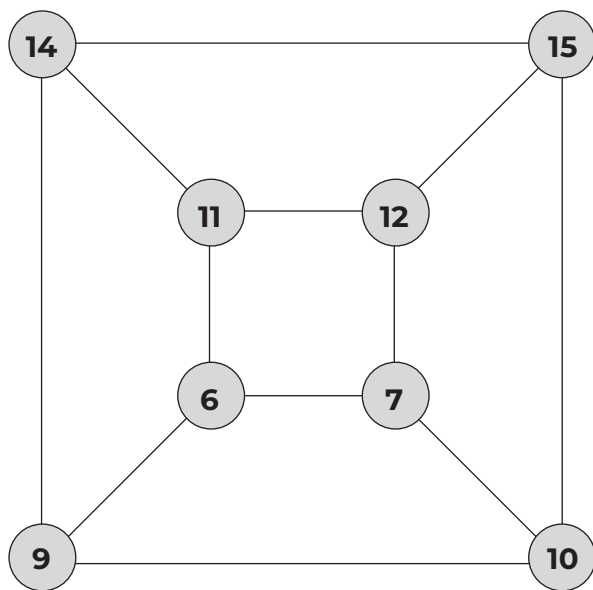


Figura 1

Grafo representativo das somas das faces confluentes nos vértices de um dado e de rotações de 90°

- 5) Em seguida, coloca-se esta segunda pilha sobre a primeira, aquela sobre a qual se colocou a carta escolhida.
- 6) Para se adivinhar a carta escolhida basta somar $23+6 = 29$. Ou seja, a carta escolhida será a 29ª a contar do topo do baralho.

Apresenta-se a seguir um conjunto de seis figuras, figura 2a a figura 2f, através do qual se pretende representar a sequência de ações acima descrita.

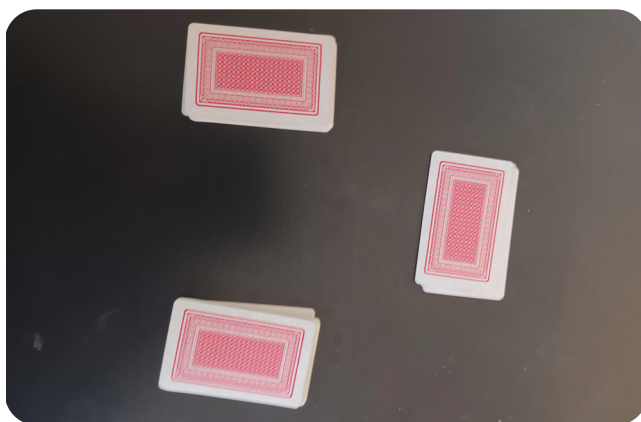


Figura. 2a

Maço com 6 cartas mais dois maços com 23 cartas cada

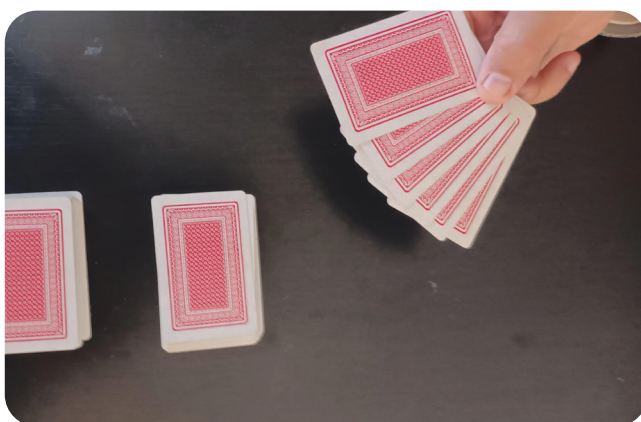


Figura. 2b

Escolha de uma das 6 cartas

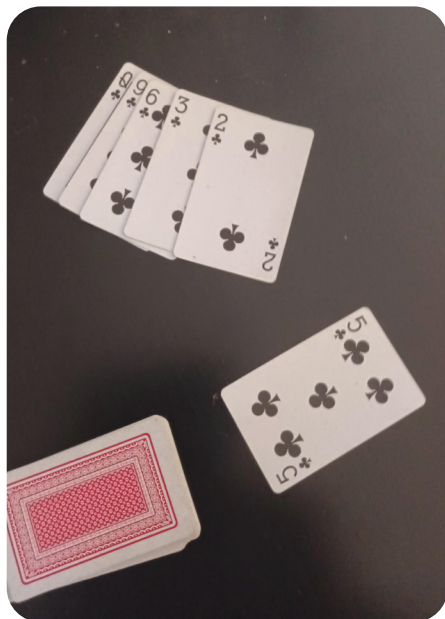


Figura 3d

Consulta da sequência global

Vejamos como utilizar as sequências de De Bruijn, sabendo que $k=5$ e $2^k=2^5=32$.

As cartas são identificadas por 5 bits, 0 ou 1, sendo que o primeiro indica a cor, os dois primeiros indica o naipe e os três restantes indicam a carta propriamente dita.

Tudo, da seguinte forma:

a) Cores

0 – vermelho

1 – preto

b) Naipes

00 – copas C

01 – ouros O

10 – espadas E

11 – paus P

- g) As 4 últimas cartas da sequência de 10 são trocadas duas a duas. Ao serem voltadas, duplicam a seleção efetuada em a), no sentido em que vamos obter 4 cartas alternadas em vez de apenas um par.

Na figura seguinte apresenta-se a esquematização para 12 cartas.

Note-se que se pode aumentar o número de cartas alternadas adicionais em pares, podendo sempre começar-se por vermelho ou por negro.

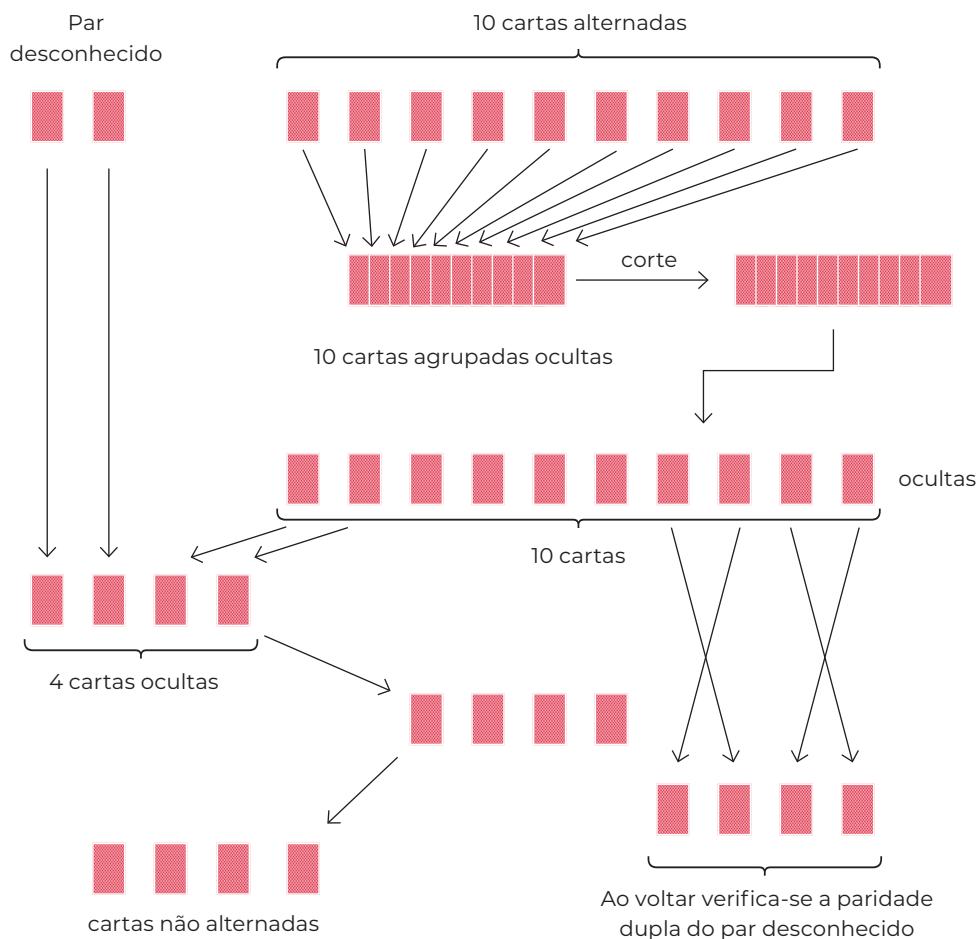


Figura 4

Esquematização para 12 cartas de um par binário desconhecido



Figura 5a
As oito cartas selecionadas



Figura 5b
As 8 cartas viradas para baixo

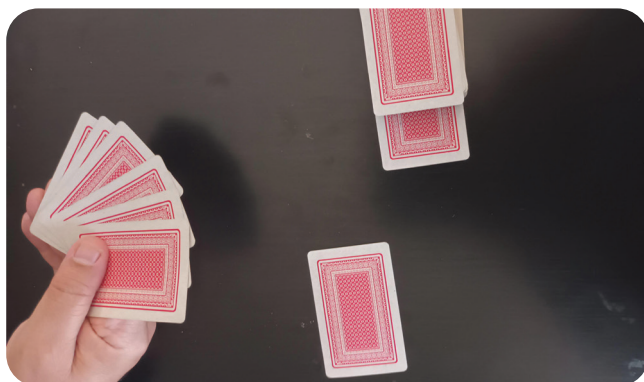


Figura 5c
Distribuição das cartas

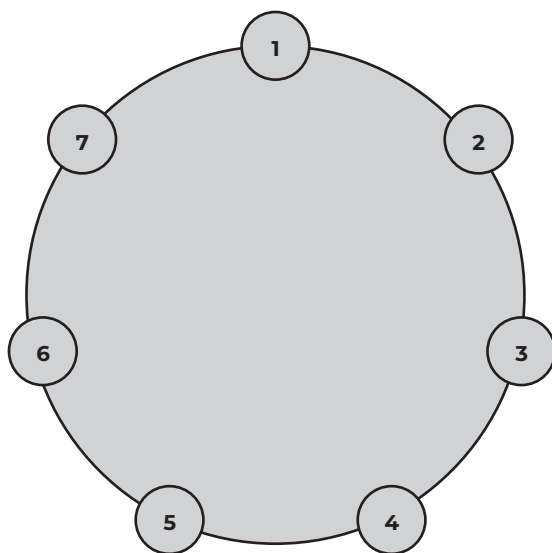


Figura 6

Círculo com os sete soldados iniciais

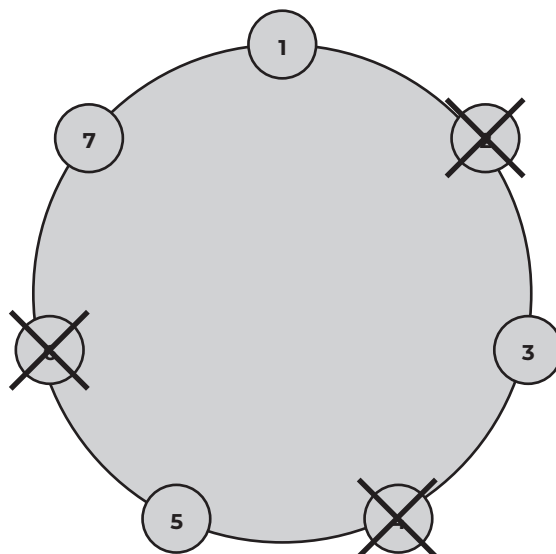


Figura 7

Soldados eliminados na primeira volta no círculo com sete soldados iniciais

- d) O condutor do problema olha para a sequência das cartas, passa o código binário a decimal e soma o valor da carta da esquerda. O resultado dá o valor da carta escondida pelo voluntário.

Exemplo 1

Antes de mais, as cartas são consideradas de Ás a Rei, ou seja, de 1 a 13.

Apresentando a ação de acordo com as fases anteriormente descritas:

- O voluntário escolhe as cartas 5, 6, 7, 8 e 9 e entrega-as ao ajudante;
- O ajudante retira o 9 para que o voluntário o esconda;
- O ajudante pode colocar as cartas na mesa de uma das seguintes formas

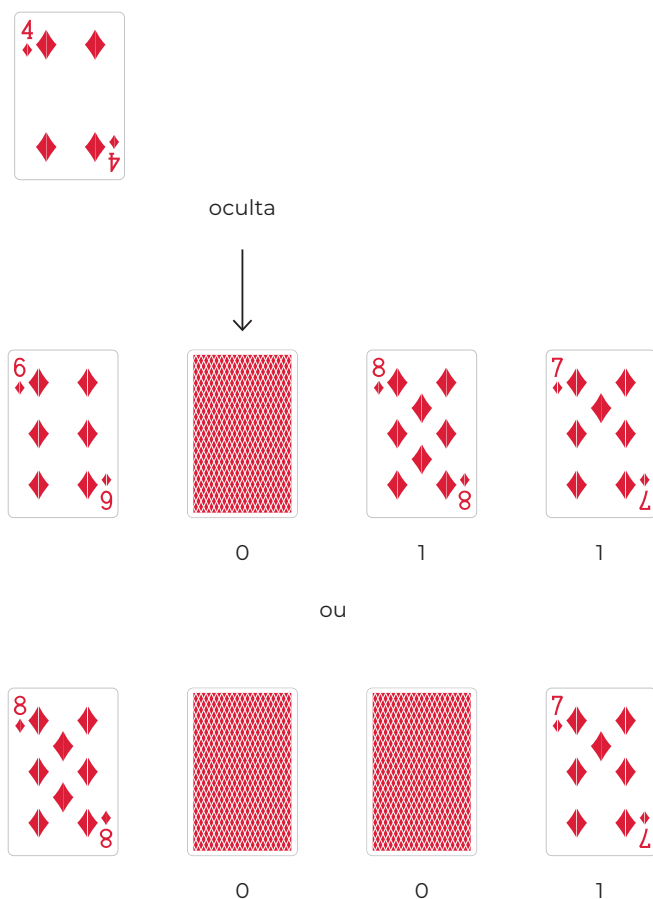


Figura 9

Formas de colocação das cartas

$$L_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad L^T_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Figura 11

Transposição de uma matriz

Assim, a matriz transposta da matriz L será:

$$L^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Em termos de propriedades com as operações, as transpostas de matrizes que resultem de somas de outras matrizes são iguais à soma das transpostas de cada uma das matrizes parcelas e o mesmo se passa com os produtos mas, neste último caso, por ordem inversa.

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Apresentadas, então, algumas noções muito básicas sobre matrizes, vai-se passar agora à situação que se denominou como “Princípio da matriz”. Recorrer-se-á também à descrição das ações de forma faseada e à apresentação de um exemplo ilustrativo e da justificação matemática. Contudo, ao invés do que tem ocorrido em situações anteriores, vai-se supor apenas a exposição do condutor do problema perante alguma audiência.

Quanto ao baralhamento “AntiFaro”, o procedimento é inverso ao do baralhamento “Faro”. Com o baralho numa das mãos, o condutor (mantem-se esta designação) retira cartas, uma a uma, a partir do fundo e coloca-as na mesa, de forma alternada, criando dois montes, esquerda e direita, e colocando o da direita sobre o da esquerda. Este processo é executado até as cartas ficarem todas na mesa. De seguida, se o objetivo for criar o processo inverso do baralhamento “Faro Out”, o condutor recolhe os montes tendo em atenção que o monte, onde foi colocada a última carta, deve ficar na parte superior do baralho depois de efetuado o baralhamento. Se se recolher por ordem contrária, estar-se-á a realizar o inverso do “Faro In”. De resto, o baralhamento “AntiFaro in” é semelhante ao “AntiFaro out” com a diferença de que o monte da esquerda é colocado sobre o da direita. As propriedades verificadas para o baralhamento “Faro” continuam válidas para o “AntiFaro”.

Tal como nas situações anteriores, apresenta-se também um exemplo de esquemas de dez cartas para o baralhamento “AntiFaro”. Refira-se, ainda, que, quando bem executados, os baralhos “AntiFaro” repõem o baralho na sequência de cartas inicial antes dos baralhos “Faro”.

Apresentam-se de seguida os esquemas de dez cartas para os baralhos “Faro out” e “Faro in”.

Esquemas (10 Cartas)

a) “Faro out”

1	1	1	1	1
2	6	8	9	5
3	2	6	8	9
4	7	4	7	4
5	3	2	6	8

----->

6	8	9	5	3
7	4	7	4	7
8	9	5	3	2
9	5	3	2	6
10	10	10	10	10

APOIO

Damos **energia** aos seus projetos.

Soluções integradas para edifícios
mais sustentáveis



Para que toda uma estrutura funcione, necessita de energias vitais que tornem possível cada gesto, cada ação. Recursos como **eletricidade ou gás** são elementos preciosos que nunca podem estar ausentes nos espaços públicos ou privados.

Desde 1979, em **todo este processo está presente um nome: Rolear**. Especialista em sistemas e equipamentos técnicos que, embora invisíveis, permitem que diariamente se possa desfrutar de total conforto.

O Grupo Rolear dispõe de uma oferta única de soluções, que vão desde o fornecimento de produtos e equipamentos elétricos e eletromecânicos, à distribuição de **gás canalizado**, passando pela **construção civil, infraestruturas e arranjos exteriores, instalações técnicas especiais, manutenção, apoio técnico e formação**.

Porque **há coisas que não podem parar**.

DIVERSÕES MATEMÁTICAS COM NÚMEROS E CARTAS

Filipe Didelet
Francisco Sena

Sobre a obra

Apresenta-se, sob a forma de truques ou jogos, de forma lúdica, uma série de problemas em que a matemática desempenha um papel fundamental. Pretende-se também contribuir para dar maior atração à matemática. Temos de estar cientes da utilidade do conhecimento para sentirmos a necessidade de o desenvolver. Por isso, tentar transmitir a matemática sem uma forte perspetiva em relação à sua utilidade será sempre uma tarefa ingrata e de fraco êxito. Aqui dividimos as situações apresentadas em dois tipos diferentes, as que são tratadas unicamente com números, incluindo aqui também os jogos com acessórios em que só há números, e as que utilizam também cartas de jogar. Todos estes problemas têm uma base matemática mas costumam ser apresentados de forma repetitiva sem dar ao público o conhecimento no qual se baseiam. Pretendemos inovar, mostrando e demonstrando os princípios que estão na base das situações apresentadas.

Sobre os autores

FILIFE JOSÉ DIDELET PEREIRA

Licenciado e Mestre em Engenharia Mecânica pelo Instituto Superior Técnico e Doutoramento, também em Engenharia Mecânica, pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

É atualmente Professor Coordenador da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal do Instituto Politécnico de Setúbal. Tem dezenas de artigos técnicos e científicos publicados em Portugal e no estrangeiro nas áreas da manutenção e da fiabilidade, através de revistas ou através da participação em congressos. Tem também orientado várias dissertações académicas nestas áreas, ao nível de mestrado e de doutoramento em diversas instituições. É Membro Conselheiro Especialista em Manutenção pela Ordem dos Engenheiros. Integra a Comissão Científica da International Conference on Maintenance Engineering (IncoME), promovida pela Universidade de Manchester, desde 2016.

FRANCISCO MANUEL VICENTE SENA

Doutor em Gestão na especialidade de Operações, pela Universidade Aberta e MSc. em Marine Engineering. É licenciado em Engenharia de Máquinas Marítimas, pela Escola Superior Náutica Infante D. Henrique, com um bacharelato em Máquinas Marítimas pela mesma escola.

Foi Professor Coordenador no Instituto Superior de Engenharia da Universidade do Algarve e Antigo Oficial Engenheiro Maquinista da Marinha Mercante na Sociedade Portuguesa de Navios Tanques (SOPONATA) e na Companhia Nacional de Navegação (CNN). É também autor de diversos artigos técnicos de manutenção e fiabilidade para congressos nacionais e internacionais.

Apoio

GRUPO
rolear

Também disponível em formato e-book



ISBN: 978-989-930-540-3



www.quanticaeditora.pt

engebook