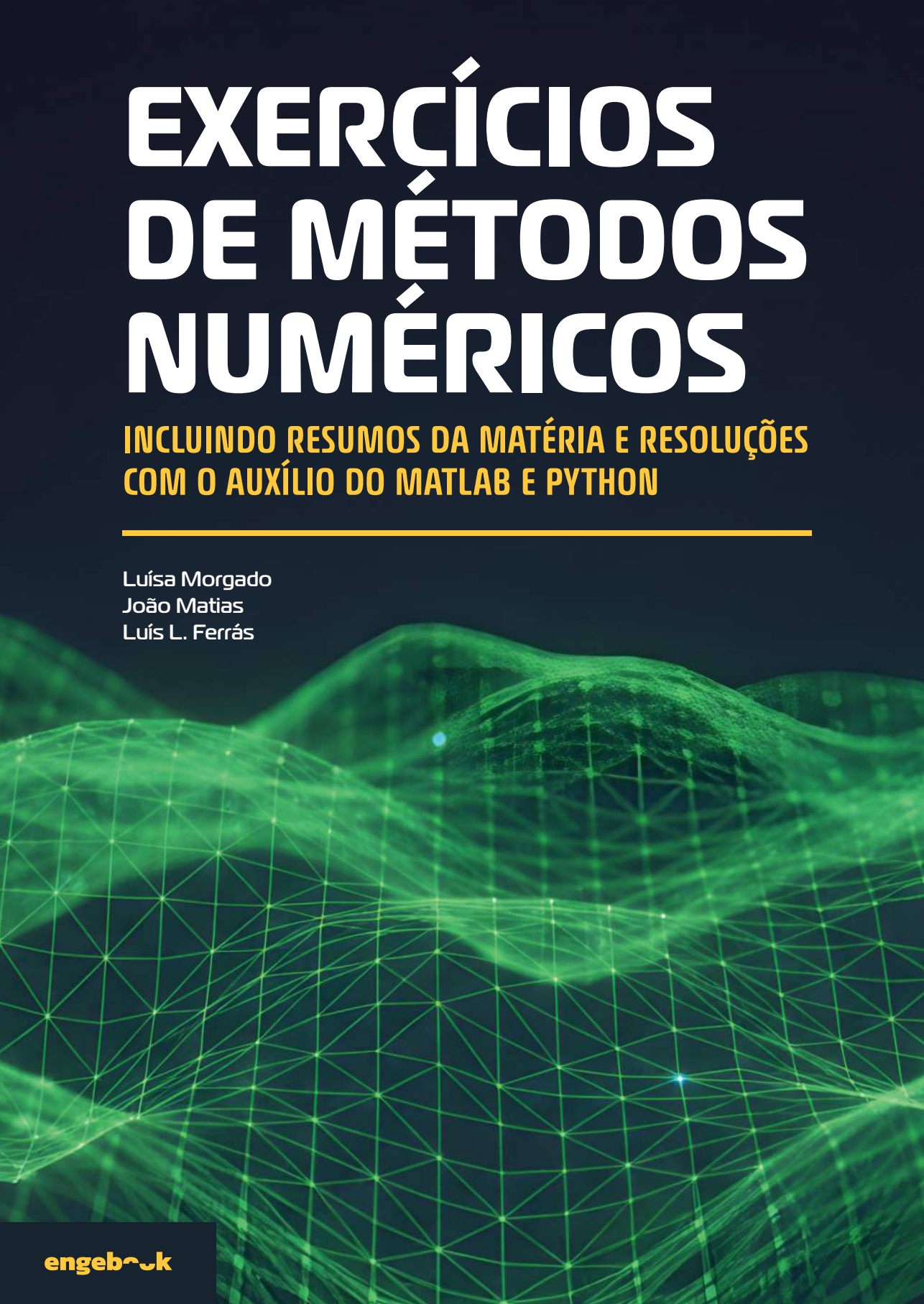
EXERCÍCIOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

INCLUINDO RESUMOS DA MATÉRIA E RESOLUÇÕES COM O AUXÍLIO DO MATLAB E PYTHON

Luísa Morgado
João Matias
Luís L. Ferrás



engebook

AUTORES
LUÍSA MORGADO
JOÃO MATIAS
LUÍS L. FERRÁS

TÍTULO
EXERCÍCIOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS
INCLUINDO RESUMOS DA MATÉRIA E RESOLUÇÕES COM O AUXÍLIO DO MATLAB E PYTHON

EDIÇÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA
Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO
Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN DE CAPA
Luciano Carvalho
Delineatura, Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO
Janeiro, 2026

DEPÓSITO LEGAL
556333/25

A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2026 | Todos os direitos reservados a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, e ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU
519.6 – Análise numérica. Métodos numéricos
519.688 – Métodos numéricos. Algoritmos computacionais

ISBN
Papel: 9789899305151
E-book: 9789899305168

Catalogação da publicação
Família: Bases de Engenharia
Subfamília: Matemática

Índice

Prefácio **vii**

1 Erros **9**
1.1 Tipos de Erros . . . 9
1.2 Representação de Números Inteiros e Reais . . . 11
1.2.1 Representação de números inteiros: . . . 11
1.2.2 Representação de números reais: . . . 12
1.2.3 Notação científica ou de ponto (vírgula) flutuante: . . . 13
1.3 Erros de Arredondamento . . . 15
1.3.1 Erro absoluto e erro Relativo: . . . 18
1.3.2 Casas decimais corretas e algarismos significativos: . . . 18
1.4 Propagação do Erro: . . . 25
1.5 Condicionamento e Estabilidade . . . 33
1.5.1 Curiosidades . . . 34
1.6 Exercícios . . . 35

2 Equações Não Lineares **41**
2.1 Localização da raízes . . . 42
2.1.1 Método gráfico . . . 42
2.1.2 Método dos Números de Rolle . . . 44
2.2 Métodos iterativos . . . 46
2.2.1 O Método da bissecção . . . 47
2.2.2 Método do Ponto fixo . . . 51
2.2.3 Método de Newton . . . 58
2.2.4 Método da Secante . . . 62
2.3 Exercícios . . . 65
2.4 Códigos em Python . . . 78

3 Sistemas de Equações **89**
3.1 Normas vetoriais e matriciais . . . 90
3.2 Erro absoluto e erro relativo . . . 99
3.3 Métodos iterativos . . . 100
3.3.1 Método de Jacobi . . . 103

3.3.2 Método de Gauss-Seidel . . . 106
3.3.3 Fórmulas de Recorrência . . . 109
3.3.4 Sistemas de equações não lineares . . . 110
3.4 Exercícios . . . 113
3.5 Códigos em Matlab e Python . . . 134

4 Aproximação de Funções 141
4.1 Polinómio interpolador . . . 141
4.1.1 Fórmula interpoladora de Lagrange . . . 144
4.1.2 Erro do polinómio interpolador de Lagrange . . . 145
4.1.3 Fórmula interpoladora de Newton . . . 146
4.2 Splines: interpolação polinomial por partes . . . 151
4.2.1 Tipos mais comuns . . . 151
4.2.2 Spline cúbica natural: derivação do sistema . . . 152
4.2.3 Implementação computacional . . . 154
4.3 Mínimos Quadrados . . . 155
4.3.1 Método do mínimos quadrados . . . 156
4.4 Exercícios . . . 173
4.5 Códigos em Python . . . 190

5 Integração Numérica 195
5.1 Regra dos Retângulos . . . 196
5.2 Regra do Trapézio . . . 198
5.3 Regra de Simpson . . . 201
5.4 Fórmulas Compostas . . . 203
5.5 Outros métodos de integração numérica . . . 213
5.6 Exercícios . . . 215
5.7 Códigos Python . . . 223

6 Problemas de Valor Inicial 227
6.1 Existência e unicidade da solução . . . 230
6.1.1 Problema bem posto . . . 237
6.2 Métodos numéricos . . . 239
6.2.1 Métodos de Taylor . . . 239
6.2.2 Métodos de Euler . . . 241
6.2.3 Métodos de Runge-Kutta . . . 247
6.3 Convergência de métodos numéricos . . . 249
6.3.1 Formulação geral de métodos de Passo Simples . . . 249
6.3.2 Erro de truncatura e consistência . . . 250
6.3.3 Exemplos de erros de truncatura . . . 250
6.3.4 Convergência dos métodos numéricos . . . 251
6.4 Exercícios . . . 255
6.5 Códigos Python . . . 262

Bibliografia cclxvii

Prefácio

Os Métodos Numéricos desempenham um papel central não apenas na Engenharia e Matemática, mas também em diversas áreas das Ciências, constituindo uma ferramenta essencial para a modelação e resolução de problemas que não admitem solução analítica exata.

Este livro apresenta uma abordagem sistemática e integrada à Análise Numérica, combinando o enquadramento teórico com a aplicação prática dos principais métodos. A obra encontra-se estruturada de modo progressivo, iniciando-se com o estudo dos erros e da sua propagação, seguido da análise de equações não lineares, sistemas de equações lineares, interpolação polinomial, ajuste de funções a dados experimentais através do método dos mínimos quadrados, integração numérica e, por fim, a resolução de problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias.

A elaboração deste manual resulta da experiência docente dos autores no ensino dos métodos numéricos, durante a qual foi possível identificar uma crescente necessidade de materiais de apoio que articulem teoria, prática e validação de resultados. Com frequência, os estudantes manifestam insegurança na aplicação dos conceitos adquiridos, sobretudo na resolução de exercícios. Assim, o presente livro visa colmatar essa lacuna, oferecendo não apenas soluções comentadas, mas também uma análise crítica das condições de aplicabilidade e das limitações de cada método.

A obra introduz ainda o Matlab e Python como ferramenta de apoio ao cálculo e à experimentação numérica, incentivando a utilização de software científico no processo de aprendizagem e na resolução de problemas matemáticos.

Com o objetivo de tornar o livro acessível e autónomo, cada capítulo inicia-se com um resumo dos conceitos fundamentais necessários à compreensão dos métodos abordados e à resolução dos exercícios. Esta estrutura procura equilibrar o rigor matemático com a vertente aplicada, tornando o texto útil tanto para estudantes de cursos de Engenharia e Ciências como para docentes e profissionais que pretendam rever e consolidar os fundamentos dos métodos numéricos.

Módulo 1

Erros

Neste capítulo é apresentado um resumo sobre a teoria de erros. Os conceitos aqui apresentados são essenciais para a resolução (e compreensão das resoluções) dos exercícios sugeridos.

1.1 Tipos de Erros

Quando recorremos a uma calculadora ou a um computador para resolver numericamente um dado problema matemático, dois tipos de erro podem surgir:

- Erros de **arredondamento**: as máquinas, de capacidade limitada, não conseguem representar todos os números reais (é impossível representar infinitas casas decimais);
- Erros de **truncatura**: surgem sempre que se substitui um problema contínuo por um discreto, ou quando se substitui um processo de cálculo com um número infinito de operações, por outro com um número finito.
    - Suponha que queremos aproximar a função e^x usando a expansão de Taylor em torno de $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{1.1}$$

Se truncarmos a série após o termo de segunda ordem, ficamos com:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} \tag{1.2}$$

O erro de truncatura é a soma dos termos que foram ignorados:

$$\text{Erro} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{1.3}$$

1.2 Representação de Números Inteiros e Reais

1.2.1 Representação de números inteiros:

Um inteiro $N \neq 0$ com $n+1$ dígitos é representado na base decimal, univocamente, por

$$\begin{aligned} N &= \pm (d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0)_{10} \\ &= d_n \times 10^n + d_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0, \end{aligned}$$

sendo d_i um inteiro tal que $0 \leq d_i < 10$, $i = 0, 1, \dots, n$, $d_n \neq 0$.

Exemplo 1 $483 = 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = (483)_{10}$. □

Se um número inteiro, $N \neq 0$ está representado numa outra base b, $b \geq 2$ que não a decimal, então:

$$\begin{aligned} N &= \pm (d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0)_b \\ &= \pm d_n \times b^n + d_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0, \end{aligned}$$

com $0 \leq d_i < b$, $i = 0, 1, \dots, n$, $d_n \neq 0$ e em que as operações no segundo membro são efetuadas na base 10.

- **Mudança da base** b **para a base** 10:

  É imediata, como podemos ver no seguinte exemplo em que se passa da base 2 para a base 10.

Exemplo 2 $(10110)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 22$. □

- **Mudança da base** 10 **para a base** b:
  Sendo $b \geq 2$,

$$\frac{N}{b} = \underbrace{\pm d_n \times b^{n-1} + d_{n-1} \times b^{n-2} + \cdots + d_1}_{\text{Quociente}} + \frac{\overbrace{d_0}^{\text{Resto}}}{b},$$

  i.e., o digito de menor ordem, d_0 na representação de N na base b, é o resto da divisão de N por b. Dividindo o quociente da divisão de N por b, novamente por b, obtemos o dígito d_1 que será o resto daí resultante, e assim sucessivamente, até efectuarmos a n-ésima divisão cujo **quociente** é d_n.

  Por exemplo, se quisermos converter o número 22 na base 10 para uma base 2, temos então:

Figura 1.2: Cálculo numérico de $\sin(\pi)$.

Problema de propagação de erros: Se tivermos um valor $\bar{x}$ que aproxima x, ao calcularmos a imagem por uma função f, vamos obter um valor aproximado $f(\bar{x})$ diferente de $f(x)$. **De que forma o erro é propagado ao efectuarmos o cálculo de uma função (ou operação) f num valor aproximado de x, $\bar{x}$?**

Figura 1.3: Propagação do erro. De cima para baixo conseguimos ver a influência do $\Delta\bar{x}$ (ao usar o valor aproximado $\bar{x}$ em vez de x) no erro final ($\Delta\bar{y}$) obtido depois de fazermos a operação $f(x)$ (ou $g(x)$). Da esquerda para a direita conseguimos ver a influência da operação ($f(x)$ ou $g(x)$) no erro $\Delta\bar{y}$. $\Delta\bar{y}$ depende de $\Delta\bar{x}$ e da derivada (taxa de variação) da função.

Vamos começar por ver um exemplo. Na Figura 1.3 estão ilustradas diferentes funções, que representam diferentes operações. Por exemplo, podemos ter funções como $f(x) = x^2$ ou $f(x) = e^x$, etc. Na função $y = f(x) = x^2$, temos então uma multiplicação de x por si próprio. Se em vez de usarmos o valor exato x usarmos um valor aproximado $\bar{x}$, a operação $\bar{y} = f(\bar{x}) = \bar{x}^2$, vai fornecer um resultado com erro, que resulta da multiplicação de valores aproximados (multiplicação de $\bar{x}$ por si próprio). O erro obtido depois de fazermos a operação com valores aproximados é designado por

Teorema (Bolzano)
O teorema de Bolzano-Cauchy, também conhecido como Teorema do Valor Intermediário, é um teorema de grande importância na determinação de zeros, de certas funções reais de uma variável real. Foi primeiramente enunciado em 1817 por Bernard Bolzano (1781-1848), um sacerdote, matemático e filósofo de Praga. Às vezes é também associado a Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático e físico francês, que foi discípulo de matemáticos como Pierre Simon Laplace e Joseph Louis de Lagrange.
O teorema afirma que se $f(x)$ é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, e k é um número real entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um valor real c no intervalo aberto (a, b) tal que $f(c) = k$ (ver Figura 2.2).

Corolário (Teorema de Bolzano)
Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ com sinais contrários ($f(a)f(b) < 0$), então existe pelo menos um valor real c pertencente ao intervalo aberto (a, b) tal que a $f(c) = 0$ (ver Figura 2.2).

Figura 2.2: Ilustração do Teorema de Bolzano (esquerda) e do seu corolário (direita), onde podemos ver 3 zeros da função (o corolário garante que temos pelo menos 1 zero).

Verifiquemos, p.e., que sendo $f(x) = e^x - 3x$, existe um único $x_1^* \in [0, 1]$ tal que $f(x_1^*) = 0$.

- Note-se que f é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto contínua no intervalo $[0, 1]$. Como $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = e - 3 < 0$, o Teorema de Bolzano garante-nos a existência de pelo menos um zero de f no intervalo $[0, 1]$;
- Uma vez que $f'(x) = e^x - 3$, então para todo o $x \in [0, 1]$, temos (por $f'(x)$ ser monótona crescente) $e^0 - 3 \leq f'(x) \leq e - 3$, ou seja, $f'(x) < 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Assim sendo, f é decrescente em $[0, 1]$ e, como tal, nesse intervalo não pode ter mais do que um zero.

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Uma ilustração do método da secante é fornecida na Figura 2.5

Figura 2.5: Ilustração do método da secante.

Pode provar-se que

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\frac{\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|}\,|x^* - x_n|\,|x^* - x_{n-1}|$$

e que o método da secante tem convergência supra-linear, não chegando a ser quadrática.

A ordem de convergência do método da secante é

$$p = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

o número de ouro.

Exemplo 31 *Vamos encontrar uma aproximação da raiz de* $f(x) = x^2 - 2 = 0$, *com* $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ *(usando o método da secante):*

$$x_2 = 2 - (2^2 - 2)\cdot\frac{2-1}{(2^2-2)-(1^2-2)} = 2 - 2\cdot\frac{1}{2-(-1)} = 1.3333$$
$$x_3 = 1.3333 - (-0.2222)\cdot\frac{1.3333-2}{-0.2222-2} = 1.4000$$
$$x_4 = 1.4000 - (-0.0400)\cdot\frac{1.4000-1.3333}{-0.0400-(-0.2222)} = 1.4146$$

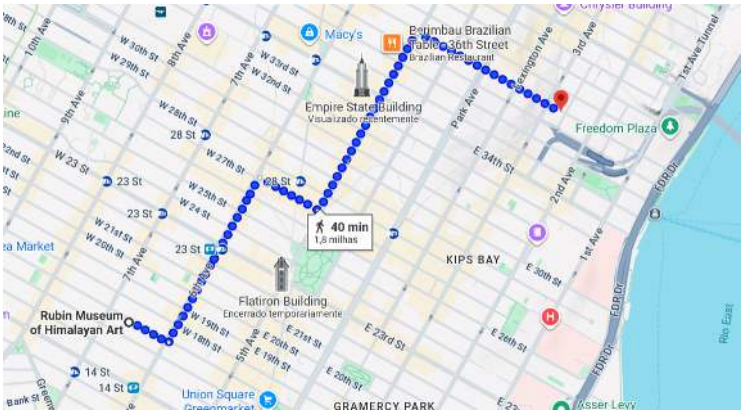


Figura 3.1: Imagem de Manhattan obtida através do Google Maps. Tendo em conta a disposição dos quarteirões, faz mais sentido calcular distâncias usando a normal L_1, em vez da norma euclidiana, onde teríamos que atravessar paredes.

Figura 3.2: Interpretação geométrica da norma L_1 para o vetor $\mathbf{v} = (5, 4)$. Qualquer trajetória de A até B que evite os obstáculos (quadrados) deve percorrer obrigatoriamente 5 unidades na horizontal e 4 na vertical (linha verde), totalizando $\|\mathbf{v}\|_1 = |5| + |4| = 9$ unidades.

- Para $p = 1$:
$$|1|^1 + |3|^1 + |7|^1 = 1 + 3 + 7 = 11$$
- Para $p = 2$:
$$(1^2 + 3^2 + 7^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + 9 + 49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{59} \approx 7.68$$
- Para $p = 10$:
$$(1^{10} + 3^{10} + 7^{10})^{\frac{1}{10}} \approx 7.00$$
- Para $p = 100$:
$$(1^{100} + 3^{100} + 7^{100})^{\frac{1}{100}} \approx 7.00$$

- $\varphi_i(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)},\ i = 0, 1, ..., n;$
  $\longrightarrow$ *Polinómio interpolador de Lagrange.*

- $\varphi_i(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1}),\ i = 0, 1, ..., n;$
  $\longrightarrow$ *Polinómio interpolador de Newton.*

▶ Na teoria da *interpolação polinomial* o nº de funções base coincide com o nº de pontos (pontos de interpolação).
▶ Na aproximação no sentido dos mínimos quadrados, o nº de funções base, m, (que podem ser polinómios ou outro tipo de funções) é **menor ou igual** ao nº de pontos, n, ($m \leq n$).

Figura 4.2: Ajuste de uma função a dados discretos.

Dados $n+1$ pontos $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, o método dos mínimos quadrados consiste na determinação de uma função

$$g(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x)$$

tal que a quantidade (erro)

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{m} (y_i - g(x_i))^2} \qquad (y_i - g(x_i)) \rightsquigarrow \textit{resíduos})$$

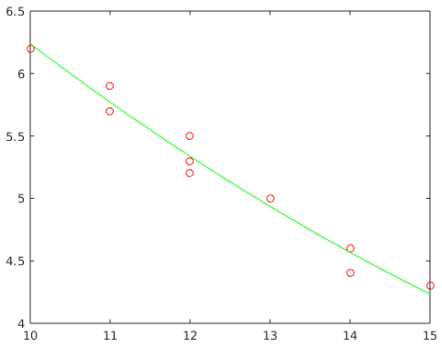
é *mínima* (Figura 4.2).

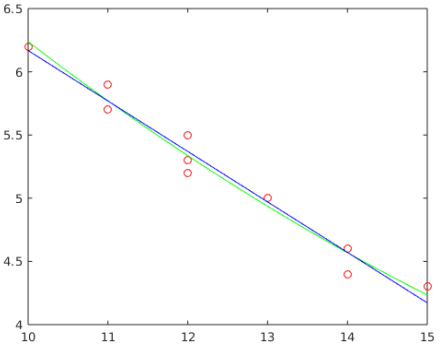
Resolvendo o sistema obtemos: $a = 0.016691560866$, $b = -0.817886482449143$ e $c = 12.747908887223467$. (A confirmar pelos alunos)
Este ajuste é feito com um erro 0.328113852988224.(A confirmar pelos alunos)
Pela comparação dos erros podemos afirmar que a parábola se ajusta melhor (tem um erro menor) aos pontos do que a reta.

Resolução 2:
Utlizando a forma matricial, a matriz A a utilizar seria

$$A = \begin{pmatrix} 225 & 196 & 144 & 196 & 144 & 121 & 121 & 100 & 144 & 169 \\ 15 & 14 & 12 & 14 & 12 & 11 & 11 & 10 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e o processo de cálculo análogo ao anterior: $AA^T = AY$.
Para terem uma ideia apresenta-se o gráfico do ajuste pelo polinómio de grau 2 e depois a sobreposição dos dois graficos.





20. Determine a recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à função dada pela seguinte tabela:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1.2	-1.5	1.8	2.3

21. Determine a parábola $g(x) = ax^2 + b$ que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos dados

x	-1	0	1
$f(x)$	3.1	0.9	2.9

22. Considere a seguinte tabela:

x	1	3	5
$f(x)$	-1.5	1	2

4.5 Códigos em Python

Método dos mínimos quadrados usando as funções x^2 e $sin(x)$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def least_squares(x, y):
    """
    x e y sao os pontos a ajustar
    """

    # Definir a função basis localmente
    def basis(t):
        """
        Vetor coluna com as funcoes base: [x^2; sin(x)]
        """
        return np.array([t**2, np.sin(t)])

    npontos = len(x)  # número de pontos
    nbf = len(basis(x[0]))  # número de funcoes base

    A = np.zeros((nbf, nbf))
    B = np.zeros(nbf)

    # Construir a matriz A e vetor B do sistema normal
    for j in range(nbf):
        for k in range(nbf):
            for i in range(npontos):
                be_val = basis(x[i])
                A[j,k] = A[j,k] + be_val[j] * be_val[k]

        for i in range(npontos):
            be_val = basis(x[i])
            B[j] = B[j] + be_val[j] * y[i]

    print('Matriz A:')
    print(A)
    print('Vetor B:')
    print(B)

    sol = np.linalg.inv(A) @ B

    print('\nCoeficientes encontrados:')
    print(f'a = {sol[0]:.6f}')
    print(f'b = {sol[1]:.6f}')

    # Função de ajuste
```

Exemplo 54 *Vamos calcular o valor do integral definido:*

$$I(f) = \int_0^1 x^2 \, dx.$$

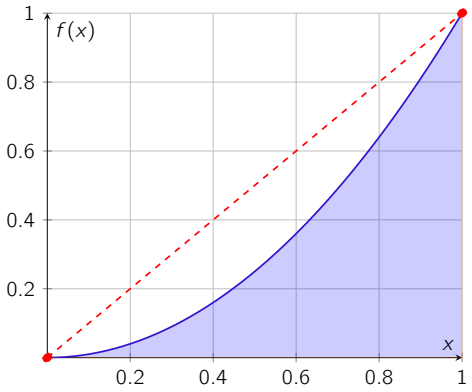
O valor exato é:

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Aplicando a Regra do Trapézio para estimar o valor do integral, obtemos:

$$I(f) \approx \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Na figura seguinte podemos ver a vermelho a linha usada para a aproximação pela regra do trapézio (neste caso um trapézio degenerado que resulta num triângulo) e a azul a representação da função $f(x) = x^2$ e a sua respetiva área para $x \in [0, 1]$.



□

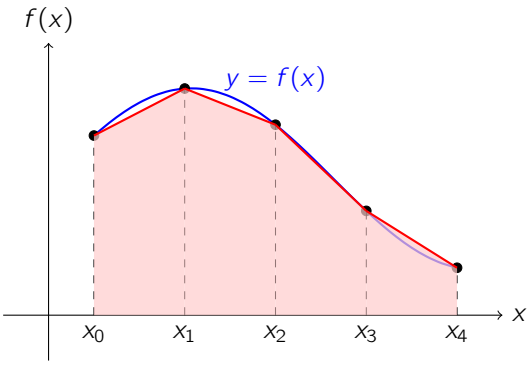
5.3 Regra de Simpson

Considere-se agora $n = 2$. Procedendo de forma semelhante ao caso $n = 1$, serão usados 3 pontos, $x_0 = a$, $x_1 = c = \dfrac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$, como abcissas de interpolação (tal como ilustrado na figura seguinte).

$$\begin{aligned}
\int_0^4 e^x\,dx &= \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 e^x\,dx + \int_2^3 e^x\,dx + \int_3^4 e^x\,dx \\
&\simeq \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{1/2} + e) + \frac{1}{6}(e + 4e^{3/2} + e^2) \\
&\quad + \frac{1}{6}(e^2 + 4e^{5/2} + e^3) + \frac{1}{6}(e^3 + 4e^{7/2} + e^4) \\
&\simeq \frac{1}{3}(e^0 + 4e^{1/2} + 2e + 4e^{3/2} + 2e^2 + 4e^{5/2} + 2e^3 + 4e^{7/2} + e^4) \\
&\simeq 53.61622 \\
Erro &= 0.01807.
\end{aligned}$$

□

Este exemplo sugere que podemos considerar uma partição do intervalo $[a, b]$, e usar essa partição para obter aproximações mais precisas do integral em questão. Para o caso da Regra do Trapézio vamos então obter a **Regra do Trapézio Composta - TC**, tal como ilustrada na figura seguinte.



Aproximação por trapézios (Regra Composta)

Neste caso são usado 4 trapézios, e a área de cada trapézio será somada de modo a obter uma *melhor* aproximação (quando comparada com a Regra do Trapézio Simples) do integral

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx.$$

Regra de Simpson Composta: Seja f definida em $[a,b]$, onde é considerada a partição uniforme $a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv b$, com $h = (b-a)/n$ e $n = 2m$. Se $f \in C^4([a,b])$, então existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$I(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right) - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$$

O erro cometido na aproximação

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right)$$

é dado por:

$$E_{SC}(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi), \quad \text{para algum } \xi \in (a,b).$$

SC significa *Simpson Composta*.

Dem.:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx$$

Aplicando a regra de Simpson a cada subintervalo:

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right) - \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i), \\ & \xi_i \in (x_{2i-2}, x_{2i}), \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Obtemos então:

$$I(f) \simeq \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{i=2}^{m} f(x_{2i-2}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(b)\right)$$

$$E_{SS}(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i)$$

Como:

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(\xi_i) \leq \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

então:

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) \leq \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

- É também esperado que N e M dependam do intervalo de tempo Δt. Ou seja, quanto maior for o intervalo de tempo, maior será o número de nascimentos e mortes.

Esta dupla dependência de N e M em relação a $P(t)$ e Δt pode então ser expressa como:

$$N = \alpha P(t)\Delta t, \qquad M = \beta P(t)\Delta t. \tag{6.4}$$

Consequentemente, a variação da população ao longo do intervalo de tempo $[t,\ t+\Delta t]$ é dada por $P(t+\Delta t) - P(t) = N - M$, ou seja:

$$P(t+\Delta t) - P(t) = (\alpha - \beta)P(t)\Delta t. \tag{6.5}$$

Dividindo ambos os lados por Δt, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t). \tag{6.6}$$

Figura 6.1: Aproximação da derivada.

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P(t), \tag{6.7}$$

que é a conhecida equação Malthusiana, descrevendo a variação *esperada* (modelo) do crescimento populacional ($\alpha > \beta$) ou declínio ($\alpha < \beta$). Frequentemente, é usada a notação $P'(t)$ em vez de $\frac{dP}{dt}$.

Seja $k = \alpha - \beta$, então ce^{kt} com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária, é a solução do nosso problema:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t), \tag{6.8}$$

Como y é a solução de (6.12), então:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y''(x) &= \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) f(x, y(x)) \\ &\vdots \\ y^{(p)}(x) &= f^{(p-1)}(x, y(x)) \end{aligned}$$

onde $f^{(k)}$ denota a k-ésima derivada total de f em relação a x.

Substituindo em (6.20):

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y(x_i)) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(x_i, y(x_i)) \\ &\quad + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p)}(\xi_i, y(\xi_i)), \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}) \end{aligned} \tag{6.21}$$

Se em (6.21) substituirmos $y(x_i)$ por y_i e ignorarmos o último termo, obtemos:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(x_i, y_i), \\ &\quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Em (6.22), y_{i+1} depende apenas de y_i, razão pela qual este é chamado um método de passo simples.

Com $p = 2$, o método (6.22) escreve-se:

Método de Taylor de ordem 2

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left(f_x(x_i, y_i) + \underbrace{f(x_i, y_i)}_{y'} f_y(x_i, y_i) \right), \\ &\quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ y_0 &= \alpha \end{aligned} \tag{6.23}$$

Consideremos agora a expansão em série de Taylor em torno de x_{i+1} :

$$\begin{aligned} y(x_i) &= y(x_{i+1}) - hy'(x_{i+1}) + \frac{h^2}{2} y''(x_{i+1}) + \cdots + (-1)^p \frac{h^p}{p!} y'^{(p)}(x_{i+1}) \\ &\quad + (-1)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y'^{(p+1)}(\xi_i), \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}) \end{aligned} \tag{6.24}$$

EXERCÍCIOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

INCLUINDO RESUMOS DA MATÉRIA E RESOLUÇÕES COM O AUXÍLIO DO MATLAB E PYTHON

Luísa Morgado
João Matias
Luís L. Ferrás

Sobre a obra

Este livro apresenta uma introdução sólida e aplicada aos Métodos Numéricos, articulando fundamentos teóricos, resolução analítica clássica e implementação computacional em Matlab e Python. Destina-se a estudantes do ensino superior nas áreas da Matemática, Engenharia, Ciências e Tecnologia, abordando de forma sistemática os principais conceitos da análise numérica, como erro, estabilidade, consistência e convergência, que constituem os alicerces para o estudo da resolução numérica de equações não lineares e de sistemas de equações, da interpolação de funções, da integração numérica e das equações diferenciais ordinárias. Cada método é desenvolvido com suporte teórico, análise de erro e exemplos detalhados, complementados por algoritmos e código comentado. Os exercícios resolvidos e propostos promovem uma aprendizagem prática e consolidam as competências teóricas e computacionais essenciais em Métodos Numéricos.

Sobre os autores

Maria Luísa Morgado licenciou-se em Matemática Aplicada e Computação, em 1994, no Instituto Superior Técnico (IST). Obteve o grau de Mestre em Matemática Aplicada, em 2000, pela Universidade do Porto. Em 2008, concluiu o doutoramento em Matemática Aplicada na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD). Em 2020 concluiu as provas de Agregação em Matemática no Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa. É Professora Catedrática do Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD e é membro efetivo do Centro de Matemática Computacional e Estocástica do IST-ID.

João Matias obteve a licenciatura em Matemática pela Universidade de Coimbra (1990), o mestrado em Informática pela Universidade do Minho (1996) e posteriormente o grau de Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (2003). É membro integrado do Centro de Investigação (CMAT) da Universidade do Minho, sendo atualmente docente do Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, onde leciona várias unidades curriculares de cursos de Engenharias e de Matemática e Ciências de Dados.

Luís L. Ferrás obteve licenciatura em Matemática pela Universidade de Aveiro (2005) e mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade do Porto (2007). É doutorado em Engenharia pela Universidade do Minho (2012) e em Matemática pela Universidade de Chester, Reino Unido (2019). Desenvolveu atividade de investigação na Universidade de São Paulo, no Massachusetts Institute of Technology e na Universidade do Minho. É membro integrado do Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte (CEFT), colaborador externo do Centro de Matemática da Universidade do Minho e docente no Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Também disponível em formato *e-book*

ISBN: 978-989-930-515-1

www.**quanticaeditora**.pt

engebook