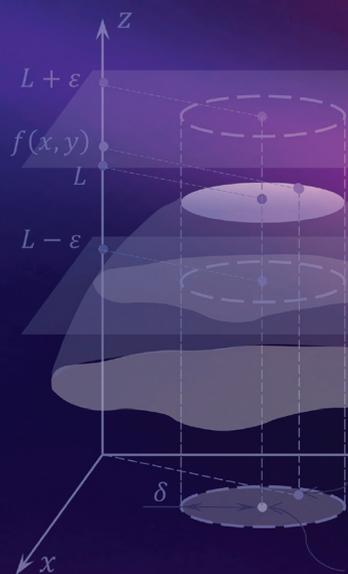
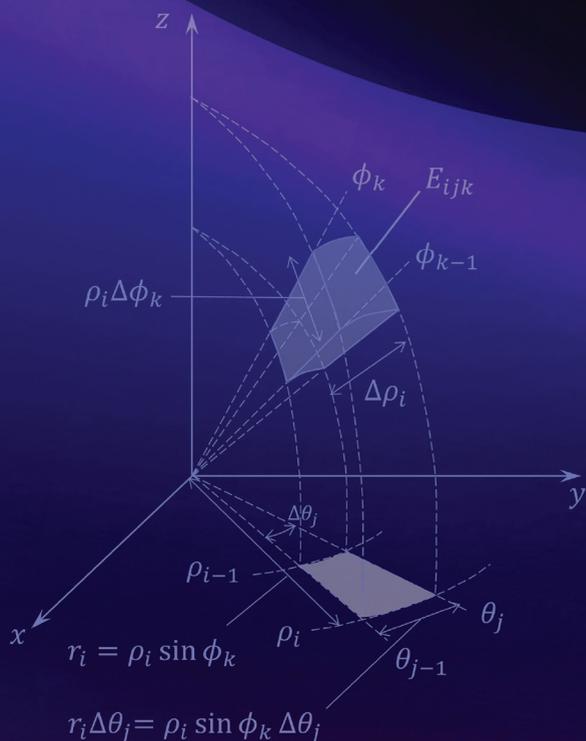


MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA EM \mathbb{R}^n

Diferenciação, Integração e Tópicos Adicionais

José A.F.O. Correia & Carlos Conceição António



AUTORES

JOSÉ A.F.O. CORREIA & CARLOS CONCEIÇÃO ANTÓNIO

TÍTULO

MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA EM \mathbb{R}^n – DIFERENCIAÇÃO, INTEGRAÇÃO E TÓPICOS ADICIONAIS

EDIÇÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA

Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO

Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN DE CAPA

Luciano Carvalho
Delineatura, Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO

Agosto, 2025

DEPÓSITO LEGAL

551610/25



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2025 | Todos os direitos reservados a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, e ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU

51 – Matemática (geral)
517 – Análise matemática
517.5 – Funções de várias variáveis; Análise em \mathbb{R}^n
512.55 – Álgebra linear (vetores e matrizes)
519.6 – Matemática aplicada; Cálculo numérico

ISBN

Papel: 9789899177956
E-book: 9789899177963

Catálogo da publicação
Família: Bases de Engenharia
Subfamília: Matemática

ÍNDICE

PREFATÓRIO	3
PREFÁCIO DOS AUTORES	5
A. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS	13
A.1. Noções básicas sobre vetores. Espaço tridimensional.....	13
A.1.1. Conceitos básicos e aritmética vetorial	13
A.1.2. Produto escalar e produto vetorial.....	21
A.1.2.1. Definição do produto interno ou produto escalar	21
A.1.2.2. Propriedades algébricas do produto interno ou produto escalar	21
A.1.2.3. Produto interno ou produto escalar – ângulo entre dois vetores.....	22
A.1.2.4. Produto interno ou produto escalar – ângulos diretores	22
A.1.2.5. Projeções ortogonais	23
A.1.2.6. Produto externo ou produto vetorial	24
A.1.2.7. Propriedades geométricas do produto externo ou produto vetorial	24
A.1.2.8. Propriedades algébricas do produto externo ou produto vetorial	25
A.1.2.9. Produto misto ou triplo produto escalar	26
A.1.2.10. Duplo produto vetorial	27
A.1.3. Equações de retas e planos	27
A.1.3.1. Equações paramétricas de retas	27
A.1.3.2. Equações vetoriais de retas	28
A.1.3.3. Planos no espaço tridimensional	28
A.1.3.4. Planos concorrentes	30
A.1.3.5. Distância envolvendo planos	31
A.1.4. Curvas e superfícies.....	31
A.1.4.1. Curvas	31
A.1.4.2. Superfícies planas	32
A.1.4.3. Superfícies quádricas	33
A.1.4.4. Superfícies cilíndricas	40
A.1.4.5. Superfícies de revolução.....	41
A.1.5. Exercícios propostos	41

A.2. Funções vetoriais e representação paramétrica de curvas	45
A.2.1. Funções vetoriais	45
A.2.2. Curvas planas e representação paramétrica de curvas	47
A.2.3. Definição de limite de uma função vetorial	51
A.2.4. Definição de continuidade de uma função vetorial	53
A.2.5. Definição de derivada de uma função vetorial	53
A.2.6. Integração de funções vetoriais	58
A.2.7. Definição de velocidade e aceleração	59
A.2.8. Curvas. Vetores tangentes e vetores normais	61
A.2.9. Triedro de Frenet	67
A.2.9.1. Plano osculador	67
A.2.9.2. Plano normal	68
A.2.9.3. Plano retificador	69
A.2.10. Segunda derivada do vetor posição (ou aceleração)	69
A.2.11. Comprimento de arco de uma curva	72
A.2.12. Parametrização relativamente ao comprimento de arco	75
A.2.13. Curvatura de uma curva	75
A.2.14. Exercícios propostos	79
A.3. Funções de R^n em R^m. Limites e continuidade	85
A.3.1. Funções de R^n em R^m	85
A.3.1.1. Noções básicas sobre campos escalares e campos vetoriais	85
A.3.1.2. Noções de topologia em R^n	86
A.3.1.3. Campos escalares – definições básicas, gráficos e conjuntos de nível	90
A.3.1.4. Campos vetoriais – definições básicas	97
A.3.2. Funções de campo escalar	102
A.3.2.1. Definição de limite	102
A.3.2.2. Propriedades dos limites	104
A.3.2.3. Definição de continuidade	105
A.3.2.4. Generalização em R^n	105
A.3.3. Funções de campo vetorial	111
A.3.3.1. Limite	111
A.3.3.2. Continuidade	112
A.3.4. Exercícios propostos	113

A.4. Diferenciabilidade e continuidade	116
A.4.1. Derivadas parciais e derivadas direcionais.....	116
A.4.1.1. Derivadas parciais	116
A.4.1.2. Derivadas direcionais	125
A.4.2. Derivadas direcionais e continuidade.....	132
A.4.3. Definição de um campo escalar diferenciável	133
A.4.4. Diferenciabilidade e continuidade de funções de campo escalar	135
A.4.5. Condição suficiente para a diferenciabilidade de um campo escalar	136
A.4.6. Regra da cadeia de um campo escalar ao longo de uma curva	137
A.4.7. Aplicações geométricas. Conjuntos de nível. Planos tangentes	140
A.4.8. Derivada direcional de um campo vetorial.....	145
A.4.9. Diferenciabilidade e continuidade de um campo vetorial	147
A.4.10. Exercícios propostos	148
A.5. Derivação de funções compostas	153
A.5.1. Regra da cadeia para derivadas de campos vetoriais	153
A.5.2. Extensão da regra da cadeia para derivadas de campos escalares	156
A.5.3. Regra da cadeia para derivadas de campos escalares	157
A.5.4. Exercícios propostos	160
A.6. Funções implícitas e sua derivação de funções de campos escalares... 	162
A.6.1. Funções implícitas.....	162
A.6.2. Derivação implícita.....	163
A.6.3. Exercícios propostos	172
A.7. Fórmula de Taylor de funções de campo escalar.....	174
A.7.1. Fórmula de Taylor de ordem m para funções reais de variável real.....	174
A.7.2. Fórmula de Taylor de funções de campo escalar	175
A.7.3. Exercícios propostos	182
A.8. Máximos e mínimos de funções reais de n variáveis.....	183
A.8.1. Máximos e mínimos livres, pontos de sela de funções de campo escalar	183
A.8.2. Máximos e mínimos condicionados.....	193
A.8.3. Multiplicadores de Lagrange e extremos condicionados	193
A.8.4. Exercícios propostos	203

B. INTEGRAÇÃO EM \mathbb{R}^n	205
B.1. Integral de linha	205
B.1.1. Curva lisa ou regular por partes	205
B.1.2. Definição de integral de linha	206
B.1.3. Integrais de linha de campos vetoriais	210
B.1.4. Integrais de linha na forma diferencial	213
B.1.5. Propriedades dos integrais de linha	214
B.1.6. Outras aplicações dos integrais de linha	215
B.1.7. Exercícios propostos	216
B.2. Integrais duplos	219
B.2.1. Definição de integrais duplos	219
B.2.2. Interpretação do integral duplo como o volume de um sólido	221
B.2.3. Método dos integrais iterados	223
B.2.4. Integral duplo sobre uma qualquer região do plano Oxy	227
B.2.4.1. Tipo I - Região verticalmente simples	228
B.2.4.2. Tipo II - Região horizontalmente simples	229
B.2.5. Propriedades dos integrais duplos	236
B.2.6. Integrais duplos em coordenadas polares. Definição	237
B.2.7. Integrais duplos em coordenadas polares. Região tipo	240
B.2.7.1. Região do tipo I	241
B.2.7.2. Região do tipo II	241
B.2.8. Outras aplicações dos integrais duplos	241
B.2.9. Jacobianos. Mudança de variáveis na integração dupla	252
B.2.10. Exercícios propostos	257
B.3. Integrais triplos	263
B.3.1. Definição de integrais triplos	263
B.3.2. Integrais triplos. Método dos integrais iterados	265
B.3.3. Integral triplo sobre uma qualquer região limitada do espaço	266
B.3.3.1. Região do tipo 1	266
B.3.3.2. Região do tipo 2	267
B.3.3.3. Região do tipo 3	268
B.3.4. Propriedades dos integrais triplos	282

B.3.5. Integrais tripos em coordenadas cilíndricas.....	282
B.3.6. Integrais tripos em coordenadas esféricas.....	290
B.3.7. Outras aplicações dos integrais duplos.....	295
B.3.8. Jacobianos. Mudança de variáveis na integração tripla.....	296
B.3.9. Exercícios propostos.....	300
C. TÓPICOS ADICIONAIS EM \mathbb{R}^n.....	305
C.1. Tópicos complementares sobre o integral de linha.....	305
C.1.1. Teorema fundamental para o integral de linha.....	305
C.1.2. Teorema de Green.....	310
C.1.3. Integrais de fluxo e circulação para campos de velocidade.....	315
C.1.4. Fluxo através de uma curva plana simples.....	316
C.1.5. Exercícios propostos.....	317
C.2. Superfícies. Área de superfície. Integrais de superfície.....	318
C.2.1. Superfícies.....	319
C.2.1.1. Derivadas parciais de funções vetoriais de duas variáveis.....	322
C.2.1.2. Planos tangentes a superfícies parametrizadas.....	322
C.2.2. Área de superfície.....	325
C.2.2.1. Área de uma superfície parametrizada.....	325
C.2.2.2. Área de uma superfície definida implicitamente.....	327
C.2.2.3. Área de uma superfície $z=f(x,y)$	330
C.2.3. Integrais de Superfície.....	333
C.2.3.1. Definição de um integral de superfície.....	333
C.2.3.2. Avaliação de integrais de superfície.....	335
C.2.3.3. Integral de superfície sobre $z=g(x,y)$, $y=g(x,z)$ e $x=g(y,z)$	337
C.2.4. Propriedades dos integrais de superfície.....	338
C.2.5. Exercícios propostos.....	340
C.3. Aplicações de integrais de superfície. Fluxos.....	343
C.3.1. Fluxo de um campo vetorial.....	346
C.3.2. Fluxo de um campo vetorial. Notação diferencial.....	348
C.3.3. Operador vetorial diferencial (nabla).....	351

C.3.3.1. Gradiente de um Campo Escalar	351
C.3.3.2. Divergência de um campo vetorial.....	352
C.3.3.3. Rotacional de um campo vetorial	353
C.3.3.4. Laplaciano de um campo escalar	355
C.3.3.5. Laplaciano de um campo vetorial	357
C.3.3.6. Propriedades vetoriais	357
C.3.3.7. Interpretação física da divergência	362
C.3.3.8. Interpretação física do rotacional	363
C.3.4. Teorema de Gauss ou da Divergência	363
C.3.4.1. Definição do teorema de Gauss ou da Divergência	363
C.3.4.2. Divergência vista como densidade de fluxo	371
C.3.5. Teorema de Stokes.....	372
C.3.5.1. Definição do teorema de Stokes	372
C.3.5.2. Utilização do teorema de Stokes para o cálculo do trabalho	378
C.3.5.3. Relação entre o teorema de Green e o teorema de Stokes.....	378
C.3.5.4. Rotacional visto como circulação	379
C.3.6. Resumo das fórmulas de integração	380
C.3.7. Exercícios propostos	381
SOLUÇÕES	383
REFERÊNCIAS.....	415

Outras propriedades podem ser extraídas da soma ou adição de vetores, tais como, as apresentadas na **Figura A.4**.

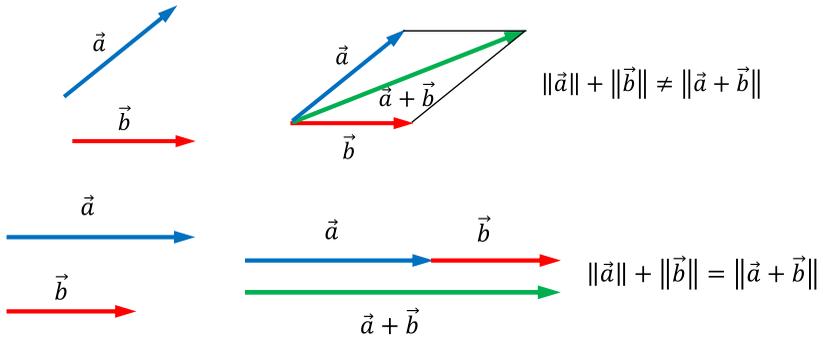


Figura A.4

A resultante da soma de vetores, pode ser obtida graficamente como apresentado na **Figura A.5**, é dada por:

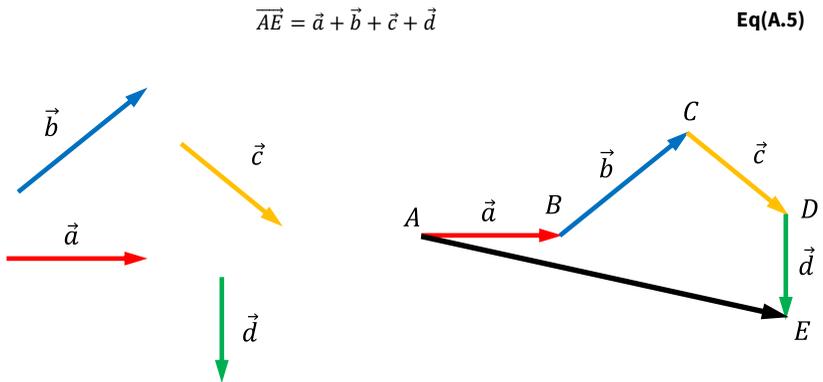


Figura A.5

Outros exemplos de paraboloides podem ser dados por $z = k + x^2 + y^2$, e ainda, por $y = z^2 + x^2 + k$.

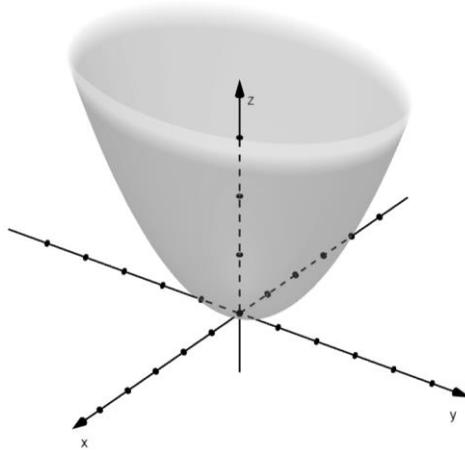


Figura A.23

Cone elíptico

O cone elíptico está graficamente apresentado na **Figura A.24**. A curva no plano xOy é um ponto (a origem), e as curvas nos planos paralelos ao plano xOy são elipses. As curvas nos planos yOz e xOz são pares de retas que se intersectam na origem. As curvas nos planos paralelos a esses são hipérbolas. A equação é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{Eq(A.43)}$$

ou, comumente apresentada como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \quad \text{Eq(A.44)}$$

Ainda, pode tomar a forma circular com o eixo Oz , dada por

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{Eq(A.45)}$$

onde a intersecção com os eixos coordenados é apresentada na **Tabela A.3**.

Para além disso, a intersecção com os planos $z = k$ pode ser dado $x^2 + y^2 = k^2$, com $k > 0$, que corresponderá a uma circunferência no plano $z = k$.

$$c\vec{r}(t) = c[f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}] = cf(t)\hat{i} + cg(t)\hat{j}$$

Divisão por um escalar

$$\frac{\vec{r}(t)}{c} = \frac{[f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}]}{c} = \frac{f(t)}{c}\hat{i} + \frac{g(t)}{c}\hat{j}, \quad c \neq 0$$

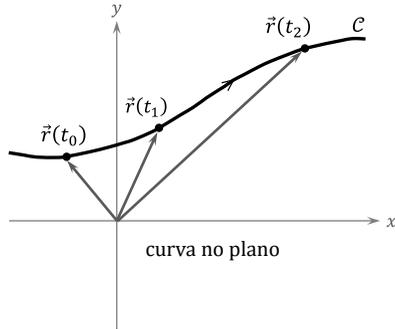


Figura A.30

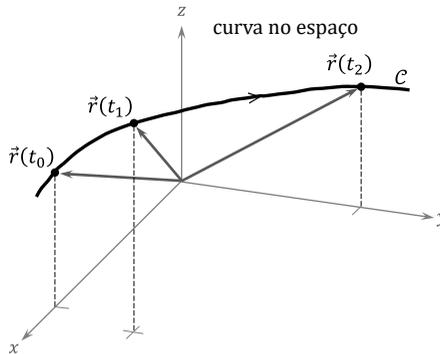


Figura A.31

Teorema: Função vetorial composta

Considere-se a função escalar $u(t)$ com domínio no intervalo I , e, tal que, o seu contradomínio esteja contido no domínio da função vetorial $\vec{r}(t)$, então, é possível obter uma função vetorial (composta) definida no intervalo I :

$$(\vec{r} \circ u)(t) = \vec{r}[u(t)]$$

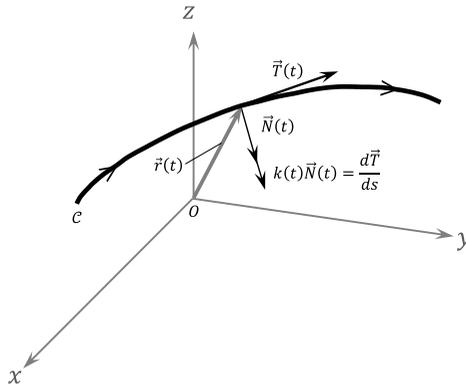


Figura A.43

Teorema: Seja a curva diferenciável, \mathcal{C} , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} \vec{N}(t)$$

$$k(t) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

e $\vec{T}'(s)$ é designado como vetor curvatura, que tem a direção da normal principal à curva.

Teorema: Seja a curva diferenciável, \mathcal{C} , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então,

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(t)\vec{N}(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|^4}$$

Chama-se raio de curvatura, designando-se por ρ , da curva \mathcal{C} ao inverso da curvatura, **Figura A.44**, isto é:

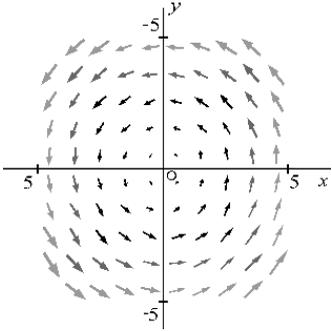
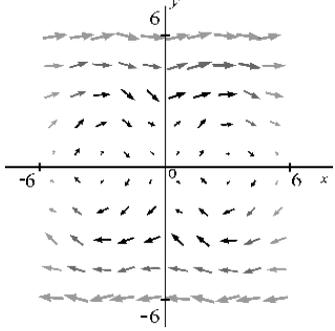
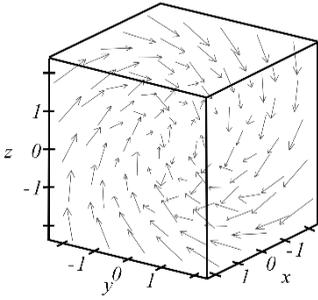
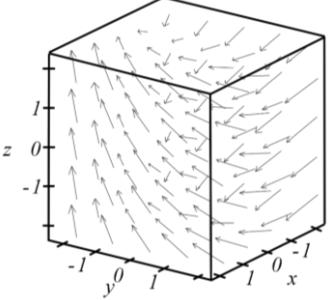
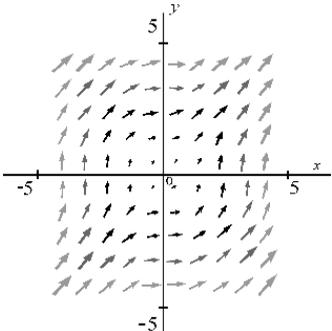
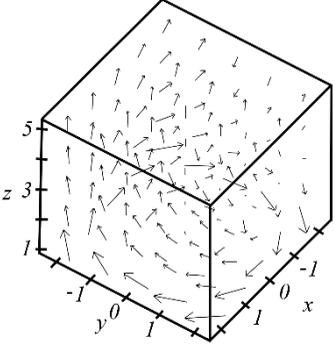
$$\rho = \frac{1}{k}, \quad k > 0 \tag{Eq.(A.99)}$$

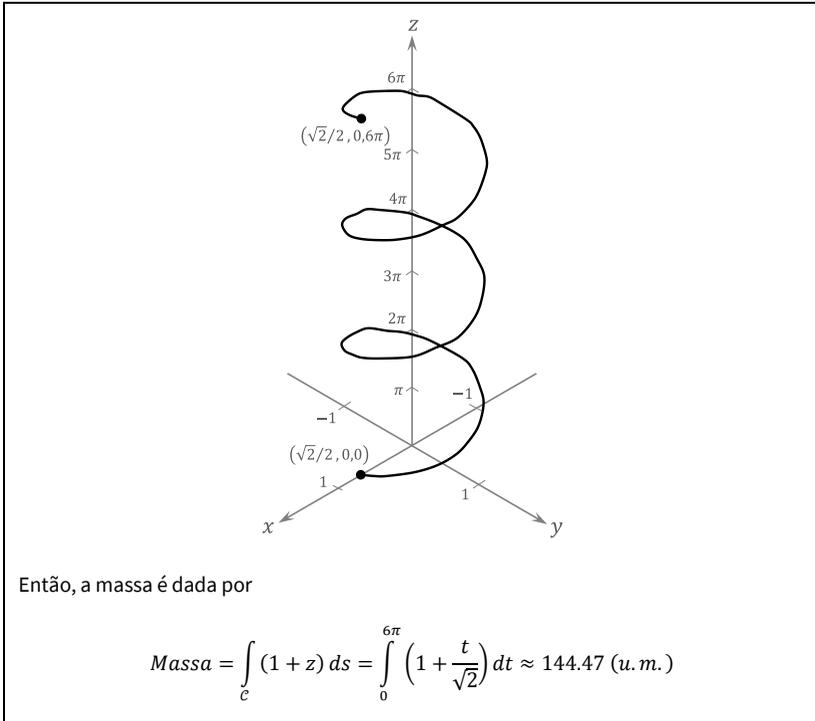
Em face do que foi exposto, realça-se o seguinte:

- i) Se $k \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$: a curva \mathcal{C} tende para uma linha reta; e,
- ii) Se $k \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$: a curva \mathcal{C} tende para um ponto.

Alguns exemplos de campos vetoriais no plano e no espaço são apresentados na **Tabela A.5**.

Tabela A.5

<p style="text-align: center;">$\vec{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$</p> 	<p style="text-align: center;">$\vec{F}(x, y) = \langle y, \sin x \rangle$</p> 
<p style="text-align: center;">$\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$</p> 	<p style="text-align: center;">$\vec{F}(x, y, z) = \langle y, -2, x \rangle$</p> 
<p style="text-align: center;">$\vec{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$</p> 	<p style="text-align: center;">$\vec{F}(x, y, z) = \langle y/z, -x/z, z/4 \rangle$</p> 



B.1.3. Integrais de linha de campos vetoriais

Uma das mais importantes aplicações físicas dos integrais de linha é calcular o trabalho realizado por um objeto em movimento num campo de forças.

Para ver como um integral de linha pode ser utilizado para encontrar o trabalho realizado num campo de força \vec{F} , vai-se considerar um objeto que se move ao longo de um percurso C no campo, **Figura B.2.**

Para determinar o trabalho realizado pela força, é necessário considerar apenas a parte da força que está a atuar na mesma direção em que o objeto se está a mover (ou na direção oposta).

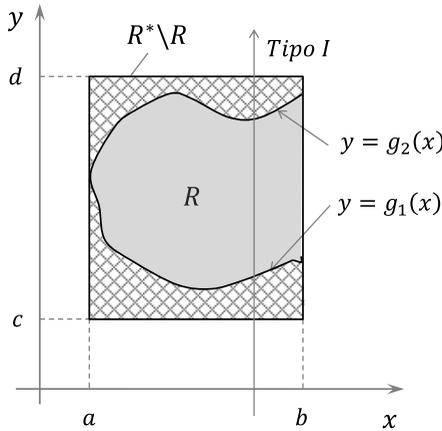


Figura B.9

Como os pontos (x, y) com $y \in [c, g_1(x) \cup]g_2(x), d]$ não pertencem a R , tem-se nestes pontos $f^*(x, y) = 0$. Por outro lado, para os pontos (x, y) com $y \in [g_1(x), g_2(x)]$ tem-se $f^*(x, y) = f(x, y)$. Assim,

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f^*(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{Eq(B.50)}$$

e pode-se enunciar o Teorema abaixo apresentado.

Teorema - Integral duplo sobre uma região verticalmente simples do tipo I do plano

Oxy: Se f é uma função contínua numa região verticalmente simples

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

então,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

B.2.4.2. Tipo II - Região horizontalmente simples

Uma região R diz-se horizontalmente simples se é do tipo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

com h_1 e h_2 funções contínuas em $[c, d]$, **Figura B.10**.

O integral da função $f(x, y)$ sobre R pode ser relacionado com o integral da função $f(g(u, v), h(u, v))$ sobre G , se g, h e f têm derivadas parciais contínuas e $J(u, v)$ é zero apenas em pontos isolados, se for o caso, então

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, dudv \quad \text{Eq(B.69)}$$

O fator $J(u, v)$, cujo valor absoluto aparece na equação apresentada, é o Jacobiano da transformação de coordenadas, assim designada em homenagem ao matemático alemão Carl Jacobi.

Portanto, $|J(u, v)|$ mede o quanto a transformação expande ou contrai a área em torno de um ponto em G à medida que G é transformada em R .

O determinante Jacobiano ou Jacobiano da transformação de coordenadas $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é dado por

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{Eq(B.70)}$$

O Jacobiano pode também ser denotado por

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \quad \text{Eq(B.71)}$$

Portanto, pode-se concluir, que, quando $f(x, y) = 1$, a área de uma região R , $A(R)$, é dada por

$$A(R) = \iint_R \, dx dy = \iint_G |J(u, v)| \, dudv \quad \text{Eq(B.72)}$$

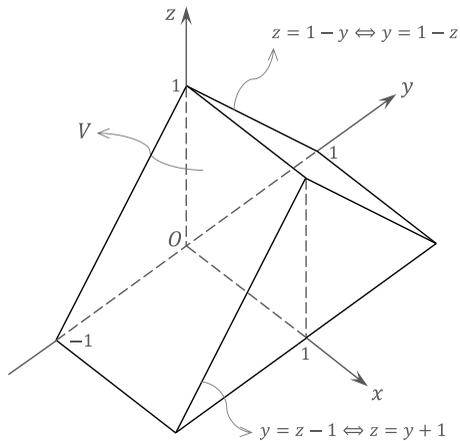
Agora, pode-se mostrar que a expressão

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \iint_\Gamma f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta \quad \text{Eq(B.73)}$$

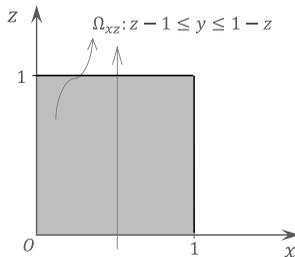
traduz, no integral duplo, a mudança de coordenadas cartesianas (x, y) para coordenadas polares (r, θ) . Neste caso, as expressões

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta$$

Fazem o mapeamento da região Γ , definida no plano $r\theta$, na região R , definida no plano xy , sendo o Jacobiano dado por:



i) Projecção da região V sobre o plano xOz (região do tipo 3), Ω_{xz} :



Quando (x, z) toma valores em Ω_{xz} , a ordenada dos pontos que estão situados em V tomam valores no intervalo $z - 1 \leq y \leq 1 - z$. Neste caso, a região V é definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, z) \in \Omega_{xz}, z - 1 \leq y \leq 1 - z\}$$

Considere-se, a definição da região Ω_{xz} recorrendo à sua projecção sobre o eixo do xx :

$$\Omega_{xz} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Conclui-se, então, que

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, z - 1 \leq y \leq 1 - z\}$$

Obtém-se, assim

$$\iint_T f(x, y, z) \, dS = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S = S \quad \text{Eq(C.55)}$$

C.2.3.2. Avaliação de integrais de superfície

Existem vários procedimentos para avaliar integrais de superfície que dependem da forma como a superfície T é representada. O teorema que se segue fornece um método para avaliar um integral de superfície quando T é representado parametricamente.

Teorema – Avaliação de integrais de superfície

Seja T uma superfície paramétrica suave cuja equação vetorial é

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$$

onde (u, v) varia numa região R no plano uv . Se $f(x, y, z)$ for uma função contínua em T , então

$$\iint_T f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \, dA$$

Para justificar o Teorema, suponha-se que o domínio R é subdividido, e suponha que o ponto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) corresponde ao valor do parâmetro de u_k^* e v_k^* . Se for usado o somatório para aproximar ΔS_k , e se for assumido que os erros nas aproximações se aproximam de zero quando $n \rightarrow +\infty$, então, tem-se que

$$\iint_T f(x, y, z) \, dS = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*), z(u_k^*, v_k^*)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k \quad \text{Eq(C.56)}$$

o que sugere a fórmula do Teorema – Avaliação de Integrais de Superfície.

Embora o Teorema seja enunciado para superfícies paramétricas suaves, a fórmula continua a ser válida mesmo que se permita que $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ na fronteira de R .

Exercício 102: Determine o integral de superfície $\iint_T x^2 \, dS$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução: Neste problema, as coordenadas esféricas fornecem uma parametrização. Um ponto típico (x, y, z) sobre a esfera tem $x = 1 \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta)$, $y = 1 \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)$, e $z = 1 \cdot \cos(\phi)$, com $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Tomando $u = \phi$ e $v = \theta$, a parametrização (com exceção para $\phi = 0$ e $\phi = \pi$) é dada por

$$\vec{r}(\phi, \theta) = [\sin(\phi) \cdot \cos(\theta)]\hat{i} + [\sin(\phi) \cdot \sin(\theta)]\hat{j} + [\cos(\phi)]\hat{k}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

As derivadas parciais da função vetorial de duas variáveis são as seguintes:

Para tal, admita-se que \mathcal{G} tem superfície superior $z = g_2(x, y)$, superfície inferior $z = g_1(x, y)$ e projeção R no plano xy , como apresentado na **Figura C.21-a)**. Seja T_1 a superfície inferior, T_2 a superfície superior e T_3 a superfície lateral, e, se a superfície superior e a superfície inferior se encontrarem como na **Figura C.21-b)**, então não existe superfície lateral T_3 .

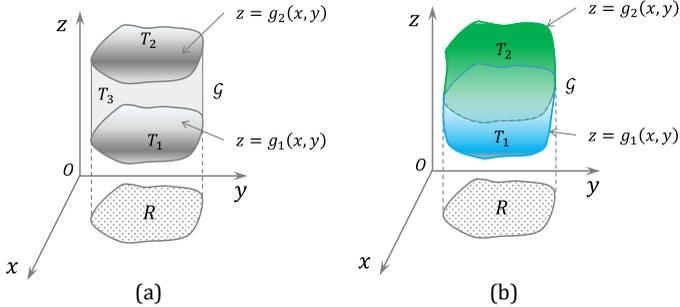


Figura C.21

A demonstração é feita para ambos os casos apresentados nas **Figuras C.21-a)** e **C.21-b)**. Então, segundo o teorema do integral triplo sobre uma qualquer região limitada do espaço tem-se

$$\iiint_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dA = \iint_R [R(x, y, z)]_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dA \quad \text{Eq(C.111)}$$

ou

$$\iiint_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_R [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))] dA \quad \text{Eq(C.112)}$$

De seguida, procede-se à avaliação do integral de superfície integrando cada superfície de \mathcal{G} separadamente. Caso exista uma superfície lateral T_3 , então em cada ponto desta superfície $\hat{k} \cdot \vec{n} = 0$, pois \vec{n} é horizontal e \hat{k} é vertical. Por isso,

$$\iint_{T_3} [R(x, y, z) \hat{k}] \cdot (\vec{n}) dS = 0 \quad \text{Eq(C.113)}$$

Portanto, independentemente de \mathcal{G} ter uma superfície lateral, pode-se escrever, que

MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA EM \mathbb{R}^n

Diferenciação, Integração e Tópicos Adicionais

José A.F.O. Correia & Carlos Conceição António

Sobre a obra

Matemática para Engenharia em \mathbb{R}^n é uma publicação didática dirigida para a formação de engenheiros, mais concretamente, para os vários ramos da engenharia – civil, mecânica, gestão industrial, eletrotecnia, aeroespacial, informática, química, biomédica, entre outros. Um dos principais objetivos deste livro é ajudar os alunos a entender os conceitos teóricos de forma eficaz e a desenvolver habilidades de resolução de problemas de forma sistemática.

Os conteúdos temáticos abordados no livro são os seguintes: funções de várias variáveis reais – limites, continuidade e diferenciabilidade, derivação de funções compostas, derivação de funções implícitas, fórmula de Taylor, máximos e mínimos livres e condicionados; integração em \mathbb{R}^n – integrais de linha, integrais duplos, e integrais triplas; e, finalmente, tópicos adicionais em \mathbb{R}^n – complementos sobre o integral de linha, superfícies, área de superfície, integrais de superfície e suas aplicações.

Sobre os autores

José A.F.O. Correia, nasceu no ano de 1984, em Peso da Régua, Portugal. É Professor no Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC/FEUP) e Investigador Sénior no CONSTRUCT/FEUP e LAETA/INEGI da Universidade do Porto (Portugal). Obteve os graus académicos de Graduação (2007) e Mestrado (2009) em Engenharia Civil pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. É especialista em Construção Metálica e Mista pela Universidade de Coimbra (2010). É doutorado em Engenharia Civil - Estruturas pela Universidade do Porto (2015). Concluiu a Agregação em Engenharia Civil (Fadiga e Integridade Estrutural) na FEUP em 2024.

Carlos Conceição António, nasceu em 1957, em Lobito, Angola. É Professor Catedrático no Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC/FEUP). Trabalhou numa empresa industrial em Portugal, com responsabilidades de gestão, de 1976 a 1983. Em 1988, concluiu a licenciatura em Engenharia Mecânica na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP). Obteve o grau de Mestre em 1991 em Engenharia Estrutural e o grau de Doutor em Engenharia Mecânica em 1995, pela mesma faculdade, em ambos os graus defendendo teses na área da otimização. Obteve o título de Agregado em Engenharia Mecânica na FEUP em 2005 com uma lição de síntese em otimização.

Também disponível em formato papel



www.quanticaeditora.pt