

MECÂNICA APLICADA

Trabalhos Virtuais Aplicado ao Equilíbrio Estático de Corpos Rígidos

José A.F.O. Correia & Abílio M.P. de Jesus



AUTORES

JOSÉ A.F.O. CORREIA & ABÍLIO M.P. DE JESUS

TÍTULO

MECÂNICA APLICADA – TRABALHOS VIRTUAIS APLICADO AO EQUILÍBRIO ESTÁTICO DE CORPOS RÍGIDOS

EDIÇÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA

Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO

Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN DE CAPA

Luciano Carvalho
Delineatura, Design de Comunicação · www.delineatura.pt

PAGINAÇÃO E ILUSTRAÇÃO

Ricardo Moura

IMPRESSÃO

Novembro, 2025

DEPÓSITO LEGAL

551609/25



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2025 | Todos os direitos reservados a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, é ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU
531.3 – Equilíbrio dos corpos. Estática
531.3:624.04 – Estática aplicada a estruturas

ISBN
Papel: 9789899177932
E-book: 9789899177949

Catálogo da publicação
Família: Engenharia Mecânica
Subfamília: Construções Mecânicas

ÍNDICE

Prefácio.....	5
Simbologia	9
1. Introdução	11
2. Deslocamentos Virtuais	13
2.1. Definição e Notação.....	13
2.2. Movimento Virtual de um Corpo Rígido	13
2.2.1. Translação Virtual.....	13
2.2.2. Rotação Virtual em Torno de um Ponto Fixo.....	14
2.2.3. Movimento Virtual – Plano Geral	15
3. Trabalho Virtual	17
3.1. Trabalho Virtual de uma Força	17
Exemplo E.1	17
Exemplo E.2	18
Exemplo E.3	18
Exemplo E.4	19
Exemplo E.5	20
3.2. Trabalho Virtual de um Binário.....	21
Exemplo E.6	22
Exemplo E.7	22
3.3. Trabalho Virtual realizado por um sistema de forças aplicado a um corpo rígido	23
3.4. Trabalho Virtual para um Sistema de Corpos Rígidos.....	24
4. Método dos Trabalhos Virtuais.....	27
4.1. Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	27
4.2. Restrições Cinemáticas e Coordenadas Independentes.....	27
4.3. Implementação do Método dos Trabalhos Virtuais.....	29
Exemplo E.8	31
Exemplo E.9	34
Exemplo E.10	36
Exemplo E.11	38
Exemplo E.12	39
Exemplo E.13	41

Exemplo E.14.....	43
Exemplo E.15.....	45
Exemplo E.16.....	47
Exemplo E.17.....	49
Exemplo E.18.....	51
5. Centro Instantâneo de Rotação.....	55
Exemplo E.19.....	58
6. Determinação de Forças Externas e Internas em Estruturas	63
Exemplo E.20.....	63
Exemplo E.21.....	65
Exemplo E.22.....	67
Exemplo E.23.....	69
Exemplo E.24.....	71
Exemplo E.25.....	72
Exemplo E.26.....	74
Exemplo E.27.....	76
7. Equilíbrio e Estabilidade de Sistemas Conservativos	79
7.1. Energia Potencial	79
7.1.1. Energia Potencial Gravitacional.....	79
7.1.2. Energia Potencial Elástica.....	80
7.2. Energia e Estabilidade Potencial Estacionária.....	82
Exemplo E.28.....	83
Exemplo E.29.....	85
Exemplo E.30.....	87
Exemplo E.31.....	88
Exemplo E.32.....	90
Exemplo E.33.....	91
8. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	95
SOLUÇÕES.....	101
REFERÊNCIAS	103

SIMBOLOGIA

C	Constante arbitrária
$\vec{C}$	Vetor binário
$\vec{C}^R$	Vetor momento resultante
d	Quantidade infinitesimal; Distância aos eixos x ou y
$d\theta$	Variação infinitesimal em θ
$d\vec{r}$	Vetor deslocamento infinitesimal
DOF	Graus de liberdade
L	Comprimento da barra
L_0	Comprimento livre da mola (não deformada)
$\vec{P}$	Vetor força externa; Vetor força ativa
r	Intensidade ou norma de $\vec{r}$
$\vec{r}$	Vetor posição
$\vec{R}$	Vetor força resultante
$\vec{F}$	Vetor da força; Vetor da força externa; Vetor da força ativa
F	Intensidade ou norma de $\vec{F}$
G	Centro de gravidade
h	Comprimento não deformado de uma mola
k	Rigidez
q	Coordenada cinematicamente independentes (linear ou angular)
Q	Intensidade ou norma de $\vec{Q}$: força ou momento de uma força
Q_s	Força exercida pela mola
s	Alongamento
V	Função potencial ou energia potencial
V_e	Energia potencial elástica
V_g	Função potencial do peso ou energia potencial gravitacional
W, mg	Peso
x	Coordenada em x
y	Coordenada em y
y_G	Coordenada y do centro de gravidade
α	Ângulo entre $\vec{F}$ e $\delta\vec{r}$
δ	Símbolo para representar uma grandeza virtual
$\delta\vec{r}$	Vetor do deslocamento virtual
δr	Intensidade ou norma de $\delta\vec{r}$
δU	Trabalho virtual
δx	Grandeza do deslocamento virtual em x
δy	Grandeza do deslocamento virtual em y
$\delta\theta$	Variação virtual em θ
$\delta\vec{\theta}$	Vetor de rotação virtual
θ	Ângulo

2. DESLOCAMENTOS VIRTUAIS

2.1. Definição e Notação

Um **deslocamento virtual** é definido como um deslocamento fictício de magnitude infinitesimal. Por “fictício” entende-se um deslocamento imaginário; pode não ocorrer de facto. A prática usual é preceder uma quantidade infinitesimal com a letra d . Assim, o vetor deslocamento infinitesimal do ponto A seria denotado por $d\vec{r}_A$. Para chamar a atenção para sua natureza fictícia, um **deslocamento virtual** é precedido por δ (delta minúsculo). Assim, o **deslocamento virtual** do ponto A seria escrito como $\delta\vec{r}_A$ [1-5].

Matematicamente, $d\vec{r}_A$ e $\delta\vec{r}_A$ são idênticos. Por exemplo, se $\vec{r}_A$ é uma função de um parâmetro θ , pode-se escrever como apresentado na **Equação (1)**:

$$\delta\vec{r}_A = (d\vec{r}_A/d\theta)\delta\theta, \quad (1)$$

onde $\delta\theta$ é a variação virtual em θ .

2.2. Movimento Virtual de um Corpo Rígido

2.2.1. Translação Virtual

A **translação virtual** de um corpo rígido é ilustrada na **Figura 1**.

Duas características importantes da translação são:

- Qualquer linha reta incorporada no corpo, como a linha AB , permanece paralela à sua posição original. Ou seja, as linhas incorporadas não sofrem rotação.
- Todos os pontos do corpo têm o mesmo deslocamento.

Portanto (**Equação (2)**),

$$\delta\vec{r}_B = \delta\vec{r}_A, \quad (2)$$

onde A e B são quaisquer dois pontos do corpo [1-5].

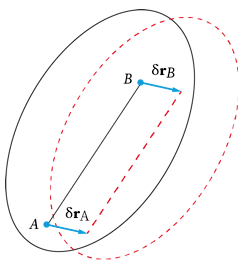


Figura 1. Translação virtual de um corpo rígido.

3.2. Trabalho Virtual de um Binário

A **Figura 6(a)** mostra um binário formado pelas forças $-\vec{F}$ e $\vec{F}$ atuando nos pontos A e B de um corpo rígido. O vetor binário correspondente $\vec{C} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$ é perpendicular ao plano do binário, conforme indicado na **Figura 6(b)**. Se o corpo sofre um movimento virtual no plano do binário, o trabalho virtual do binário é dado pela **Equação (7)**.

$$\delta U = -\vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_B. \quad (7)$$

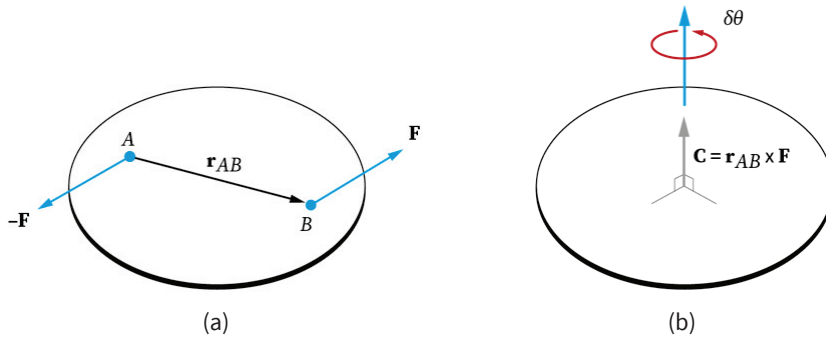


Figura 6. Trabalho virtual de uma força.

Substituindo $\delta \vec{r}_B (= \delta \vec{r}_A + \delta \vec{\theta} \times \vec{r}_{AB})$, **Equação (5)**, obtém-se a **Equação (8)**:

$$\delta U = -\vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F} \cdot (\delta \vec{r}_A + \delta \vec{\theta} \times \vec{r}_{AB}) = \vec{F} \cdot \delta \vec{\theta} \times \vec{r}_{AB} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} \cdot \delta \vec{\theta} \quad (8)$$

Ou a **Equação (9)**, dada por

$$\delta U = \vec{C} \cdot \delta \vec{\theta} \quad (9)$$

Como $\vec{C}$ e $\delta \vec{\theta}$ são colineares, isto é, vetores com a mesma direção e paralelos entre si (lembre-se que se considera apenas problemas bidimensionais), o trabalho virtual do binário também pode ser escrito através da **Equação (10)**:

$$\delta U = C \delta \theta \quad (10)$$

Observe que δU é positivo se $\vec{C}$ e $\delta \vec{\theta}$ têm o mesmo sentido, e negativo se eles têm sentido oposto ^[1-5].

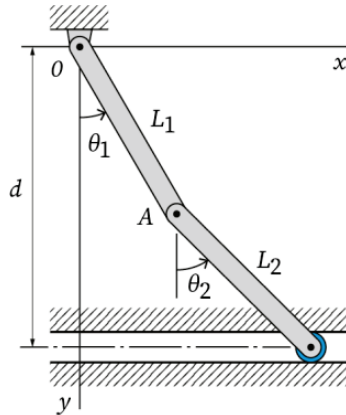


Figura 10. Sistema de duas barras com um GDL.

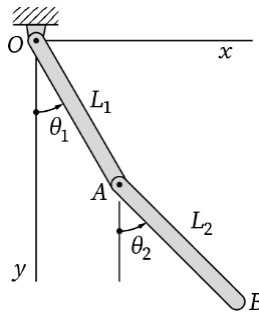


Figura 11. Sistema de duas barras com dois GDL.

4.3. Implementação do Método dos Trabalhos Virtuais

Ao aplicar o *método do trabalho virtual*, deve-se ter a certeza de que os *deslocamentos virtuais* dos pontos onde as cargas são aplicadas (os deslocamentos que contribuem para o trabalho virtual) são cinematicamente admissíveis. Isso pode ser feito por duas etapas:

- Primeiro, use a geometria para relacionar as coordenadas dos pontos onde as cargas atuam com as coordenadas cinematicamente independentes.
- Em seguida, obtenha as relações entre as mudanças virtuais dessas coordenadas (os *deslocamentos virtuais*) por diferenciação.

6. DETERMINAÇÃO DE FORÇAS EXTERNAS E INTERNAS EM ESTRUTURAS

Estruturas como vigas, pórticos ou treliças podem ser rigidamente apoiadas com encastramentos. Para calcular a respetiva reação (momento) com o auxílio do *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, o suporte correspondente deve ser removido e substituído por um apoio duplo. O ponto de aplicação do momento do encastramento da reação de apoio é então capaz de sofrer rotação. Portanto, o esforço de reação (momento) é considerado um esforço ativo no *Princípio dos Trabalhos Virtuais*. Da mesma forma, a força num pino interno ou as tensões resultantes em vigas podem ser determinadas seccionando (“cortando”) o sistema adequadamente. Devido a este “corte” imaginário, o sistema torna-se móvel e a força interna correspondente realiza *trabalho virtual* durante um *deslocamento virtual*. Os **Exemplos E.20** a **E.27** irão exemplificar o procedimento descrito [3].

Exemplo E.20

Uma viga é carregada e apoiada como ilustrado na **Figura E.20-1**. Determine a reação no apoio A. Despreze o peso da viga.

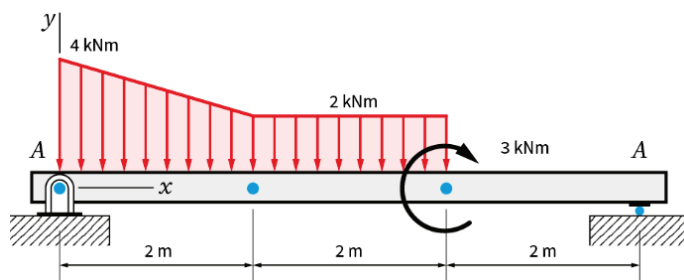


Figura E.20-1. Viga simplesmente apoiada.

Solução

As **Figuras E.20-2(a)** e **E.20-2(b)** ilustram o *diagrama de forças ativas* e os *deslocamentos Virtuais* a serem considerados para a aplicação do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* na determinação da reação do apoio A.

Assim, com base na **Figura E.20-2(b)**, para determinar a componente vertical da reação A, os deslocamentos virtuais δy_A , δy_C , e δy_D podem ser relacionados com $\delta \theta$. Antes disso, as resultantes para as cargas distribuídas e as suas distâncias horizontais em relação ao apoio B são obtidas (**Figura E.20-2(a)**).

Para a resultante da carga triangular de 2 kN/m e o seu comprimento de aplicação de 2 m , tem-se:

$$F_C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ kN}$$

7.2. Energia e Estabilidade Potencial Estacionária

Na **Seção 4** sobre o *Método dos Trabalhos Virtuais*, aponta-se que um sistema está em equilíbrio apenas se todas as forças generalizadas desaparecerem, isto é, se $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$. Para um sistema conservativo sistema com energia potencial $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$, as condições de equilíbrio são, portanto,

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0. \quad (49)$$

A **Equação (49)** representa o *princípio da energia potencial estacionária*: “A energia potencial de um sistema conservativo é estacionária (mínima, máxima ou constante) em uma posição de equilíbrio”

A energia potencial também pode ser usada para determinar se uma posição de equilíbrio é estável, instável ou neutra. Essas três classificações de equilíbrio são ilustradas na **Figura 18**^[2].



Figura 18. Posições de equilíbrio.

Diz-se que o rolete apresentado na **Figura 18(a)** está em **equilíbrio estável**, isto é, se o rolete for deslocado um pouco e depois libertado, ele voltará à posição de equilíbrio ilustrada. Na **Figura 18(b)**, o rolete está em **equilíbrio instável**, isto é, se o rolete for deslocado um pouco e depois libertado, ele afastar-se-á da posição de equilíbrio original. O **equilíbrio neutro** é ilustrado na **Figura 18(c)**, isto é, se o rolete numa superfície plana for deslocado um pouco para a esquerda ou direita e depois libertado, o rolete simplesmente permanecerá em repouso na nova posição^[2].

Das posições de equilíbrio apresentadas na **Figura 18**, pode-se deduzir o *princípio da energia potencial mínima*: “A energia potencial de um sistema conservativo é mínima numa posição de equilíbrio estável”

Este princípio pode ser observado na **Figura 18(a)**. Quando o rolete é deslocado, a sua energia potencial aumenta. Quando o rolete é libertado, ele volta à sua posição original de menor energia potencial^[2].

Entretanto, na **Figura 18(b)**, quando o rolete é deslocado, a sua energia potencial diminui. Quando o rolete é libertado, ele não volta à sua posição original de maior energia potencial. Em vez disso, o rolete irá procurar uma posição de menor energia potencial, isto é, o rolete rola para uma posição mais longe da posição de equilíbrio^[2].

Portanto, restringido a discussão sobre a estabilidade de sistemas que possuem um grau de liberdade – isto é, sistemas para os quais a energia potencial $V(q)$ é uma função de uma única

8. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8.1. Determine a força de ligação na rótula G da estrutura apresentada na **Figura 8.1**, usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Não considere o peso da viga.

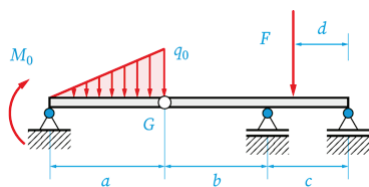


Figura 8.1

8.2. Determine as reações de apoio em A , B , C , e D para a viga ilustrada na **Figura 8.2** com duas rótulas, usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Não considere o peso da viga.

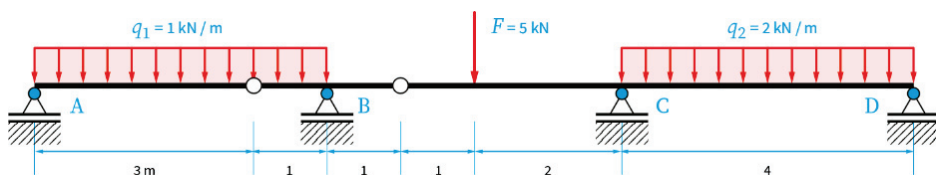


Figura 8.2

8.3. A viga é carregada e apoiada como apresentada na **Figura 8.3**. Determine a reação de apoio em B , usando o PTV. Não considere o peso da viga.

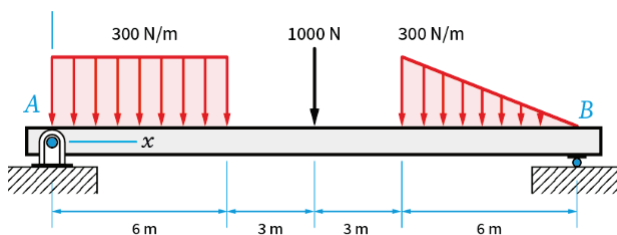


Figura 8.3

MECÂNICA APLICADA

Trabalhos Virtuais Aplicado ao Equilíbrio Estático de Corpos Rígidos

José A.F.O. Correia & Abílio M.P. de Jesus

Sobre a obra

Mecânica Aplicada – Trabalhos Virtuais aplicado ao Equilíbrio Estático de Corpos Rígidos é uma publicação didática dirigida para a formação de engenheiros, normalmente abordados na unidade curricular de Mecânica Aplicada em cursos de engenharia em universidades e politécnicos. Os aspetos teóricos e teórico-práticos abordados são apresentados da forma mais simples possível.

Os conteúdos temáticos abordados no livro são os seguintes: deslocamentos virtuais; trabalho virtual; método dos trabalhos virtuais; centro instantâneo de rotação; determinação de forças internas e externas de estruturas; e finalmente, o equilíbrio e estabilidade de sistemas conservativos.

Sobre os autores

José A.F.O. Correia, (ORCID 0000-0002-4148-9426), nasceu no ano de 1984 em Peso da Régua, Portugal, é Professor no Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC/FEUP) e Investigador Sénior no CONSTRUCT/FEUP e LAETA/INEGI da Universidade do Porto (Portugal). Obteve os graus académicos, Graduação (2007) e Mestrado (2009) em Engenharia Civil pela UTAD. É especialista em Construção Metálica e Mista pela Universidade de Coimbra (2010). É doutorado em Engenharia Civil - Estruturas pela Universidade do Porto (2015). Concluiu a Agregação em Engenharia Civil (Fadiga e Integridade Estrutural) na FEUP em 2024. Obteve ainda formação académica complementar – Mestrado em Engenharia Mecânica, ramo Mecânica dos Sólidos – pela UFF.

Abílio M.P. de Jesus, (ORCID 0000-0002-1059-715X), é Professor Catedrático do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP) e colaborador do Instituto de Ciência e Inovação em Engenharia Mecânica e Industrial (INEGI). Integra o Laboratório Associado em Energia, Transportes e Aeronáutica (LAETA), onde é Vogal da Direção e coordenador do Grupo de Materiais e Processos de Fabrico. Licenciado e mestre em Engenharia Mecânica pela FEUP (1996 e 1999), doutorou-se na mesma área pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD) em 2004 e obteve a Agregação pela FEUP em 2023. Docente desde 1996, é atualmente Diretor da Licenciatura em Engenharia Mecânica da FEUP.

Também disponível em formato papel



ISBN: 978-989-917-794-9



www.quanticaeditora.pt