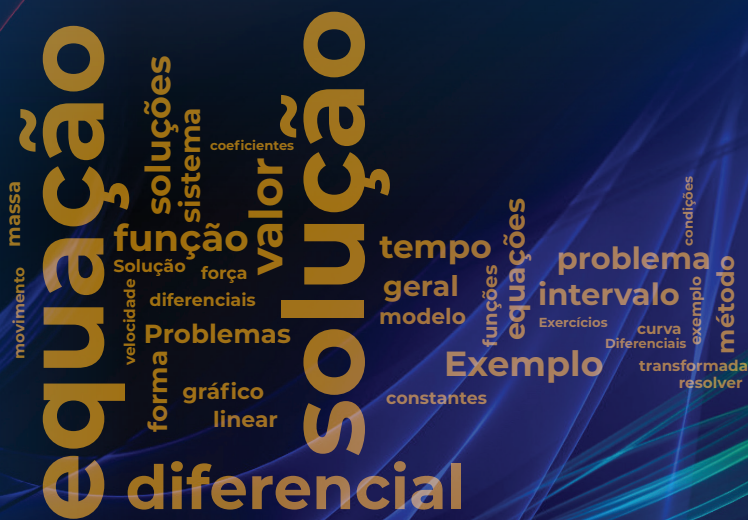


MANUEL BOLOTINHA

Bases de Matemática para engenheiros electrotécnicos



Bases de Matemática para engenheiros electrotécnicos

MANUEL BOLOTINHA

AUTOR

Manuel Bolotinha

TÍTULO

BASES DE MATEMÁTICA para engenheiros electrotécnicos

EDIÇÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

Praça da Corujeira n.º 38 4300-144 PORTO – geral@quanticaeditora.pt

CHANCELA

Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO

Booki – Conteúdos Especializados

Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · info@booki.pt – www.booki.pt

PARCEIRO DE COMUNICAÇÃO

oelectricista – Revista Técnica · www.oelectricista.pt

DESIGN E REVISÃO

Delineatura – Design de Comunicação – www.delineatura.pt

IMPRESSÃO

Setembro, 2025

DEPÓSITO LEGAL

551236/25



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.

Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2025 | Todos os direitos reservados

a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda. para a língua portuguesa.

A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, é ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro não se encontra em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990.

CDU

519.6 – Matemática aplicada à técnica, tecnologia e engenharia

510.2 – Matemática para engenheiros

621.3 – Engenharia eletrotécnica em geral

ISBN

Papel 9789899177918

E-book 9789899177925

Catálogo da Publicação

Família Eletrotecnia

Subfamília Outros

ÍNDICE

PREFÁCIO	XIII
CAPÍTULO 1 – LÓGICA MATEMÁTICA E TEORIA DE CONJUNTOS	15
1.1. LÓGICA MATEMÁTICA	15
1.2. LEIS DE DE MORGAN	17
1.3. TEORIA DE CONJUNTOS	17
1.4. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS	19
1.5. ANÉIS E GRUPOS	22
1.6. ÁLGEBRA DE BOOLE	24
1.7. APLICAÇÕES	25
CAPÍTULO 2 – SUCESSÕES E PROGRESSÕES	29
CAPÍTULO 3 – EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES	31
3.1. DEFINIÇÕES	31
3.2. PROPRIEDADES DAS EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES	32
3.3. TIPOS DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES	33
3.4. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES	35
3.5. RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES	36
3.6. EQUAÇÕES COM DUAS INCÓGNITAS	37
3.7. SISTEMAS DE EQUAÇÕES	39
3.8. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	40
CAPÍTULO 4 – GEOMETRIA EUCLIDIANA	43
4.1. INTRODUÇÃO	43
4.2. TEOREMA DE PITÁGORAS	44
4.3. TEOREMA DE TALES	44
4.4. ESTUDO DO TRIÂNGULO	45
4.5. ÁREAS DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS	48
4.6. VOLUMES DE ALGUNS SÓLIDOS	51
4.7. MÉDIA GEOMÉTRICA	52
CAPÍTULO 5 – FUNÇÕES E LIMITES	53
5.1. DEFINIÇÃO DE APLICAÇÃO E FUNÇÃO	53
5.2. TIPOS E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES	55
5.3. FUNÇÕES COMPOSTAS E INVERSAS	59
5.4. LIMITES – DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	60
5.5. CÁLCULO DE LIMITES E INDETERMINAÇÕES	62
CAPÍTULO 6 – EXPONENCIAIS E LOGARITMOS	69
6.1. FUNÇÕES EXPONENCIAIS – DEFINIÇÃO	69

6.2.	PROPRIEDADES E OPERAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS	71
6.3.	FUNÇÕES LOGARÍTMICAS – DEFINIÇÃO	71
6.4.	PROPRIEDADES E OPERAÇÕES DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS	72
6.5.	APLICAÇÕES	73
CAPÍTULO 7 – TRIGONOMETRIA		75
7.1.	INTRODUÇÃO	75
7.2.	AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	75
7.3.	LEIS E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	78
7.4.	APLICAÇÕES	79
CAPÍTULO 8 – CÁLCULO VECTORIAL		83
8.1.	DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	83
8.2.	OPERAÇÕES COM VECTORES	84
8.3.	APLICAÇÕES TÍPICAS	90
CAPÍTULO 9 – SÉRIES		93
9.1.	DEFINIÇÃO	93
9.2.	CLASSIFICAÇÃO E PROPRIEDADES	94
9.3.	SÉRIES DE FUNÇÕES	95
9.4.	SÉRIES DE FOURIER	98
CAPÍTULO 10 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL		101
10.1.	DERIVADA DE UMA FUNÇÃO – DEFINIÇÃO E CONCEITOS GERAIS	101
10.2.	TEOREMAS DE LAGRANGE, ROLLE E CAUCHY	104
10.3.	PROPRIEDADES DAS DERIVADAS	106
10.4.	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	107
10.5.	INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO – DEFINIÇÃO E CONCEITOS GERAIS	109
10.6.	GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL	113
10.7.	RELAÇÃO ENTRE OS CONCEITOS DE DERIVADA E DE INTEGRAL – PRIMITIVAS	120
CAPÍTULO 11 – MATRIZES E DETERMINANTES		123
11.1.	DEFINIÇÃO DE MATRIZ E NOTAÇÕES	123
11.2.	OPERAÇÕES COM MATRIZES	124
11.3.	DETERMINANTES	126
11.4.	PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES	128
11.5.	RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES COM DETERMINANTES	128
CAPÍTULO 12 – OPERADORES DIFERENCIAIS		131
12.1.	DEFINIÇÃO GERAL	131
12.2.	PROPRIEDADES GERAIS DO OPERADOR NABLA	132
12.3.	GRADIENTE	133
12.4.	DIVERGÊNCIA	133
12.5.	ROTACIONAL	134

12.6.	DERIVADA DIRECCIONAL	135
12.7.	LAPLACIANO	136
12.8.	RELAÇÕES ENTRE OPERADORES	136
12.9.	EQUAÇÕES DE MAXWELL	136
CAPÍTULO 13 – FUNÇÕES HIPERBÓLICAS		139
13.1.	INTRODUÇÃO	139
13.2.	AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS	140
13.3.	RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E TRIGONOMÉTRICAS	142
13.4.	LEIS E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS	142
13.5.	APLICAÇÕES	144
CAPÍTULO 14 – TRANSFORMADA DE LAPLACE		145
14.1.	INTRODUÇÃO	145
14.2.	DEFINIÇÕES	145
14.3.	PRODUTO DE CONVOLUÇÃO	147
14.4.	PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	148
14.5.	RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	150
CAPÍTULO 15 – NOÇÕES GERAIS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA		153
15.1.	INTRODUÇÃO	153
15.2.	ANÁLISE COMBINATÓRIA	153
15.3.	PROBABILIDADE – DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES	155
15.4.	TEORIA DAS PROBABILIDADES	157
15.5.	DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES MAIS UTILIZADAS	159
15.5.1.	Distribuição de Bernoulli	159
15.5.2.	Distribuição Geométrica	159
15.5.3.	Distribuição de Poisson	160
15.5.4.	Distribuição Uniforme	162
15.5.5.	Distribuição Normal ou de Gauss	163
15.5.6.	Distribuição de Weibull	164
15.6.	NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA	166
15.7.	MEDIDAS DE DISPERSÃO	169
15.8.	MARGEM DE ERRO E INTERVALO DE CONFIANÇA	170
ÍNDICE DE TABELAS E FIGURAS		173

2) *Intersecção de conjuntos*

Considerando dois *conjuntos* **A** e **B** a sua **intersecção** representa-se por $A \cap B$, e se que define como:

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

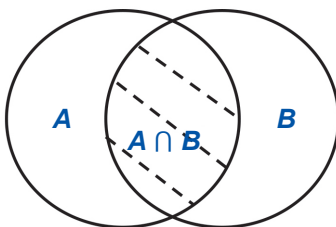


Figura 1.3 – Intersecção de conjuntos

Se se verificar a relação $A \cap B = \Phi$, os *conjuntos* **A** e **B** dizem-se **disjuntos**.

O **conjunto vazio** é designado por **valor absorvente** da *intersecção de conjuntos* e **U** por **valor neutro** da mesma operação, uma vez que:

- $A \cap \Phi = \Phi$
- $A \cap U = A$

3) *Diferença de conjuntos*

Considerando dois *conjuntos* **A** e **B** a sua **diferença** representa-se por $B - A$, e se que define como:

$$B - A = \{x: x \ni A \wedge x \in B\}$$

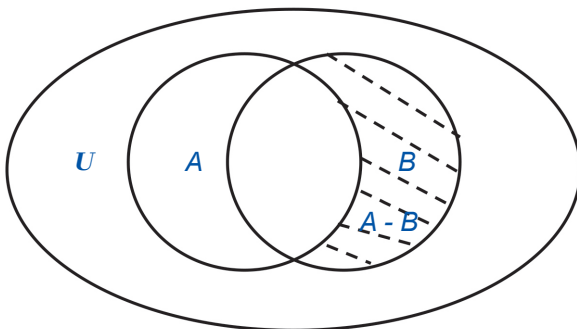


Figura 1.4 – Diferença de conjuntos

As **raízes da equação** são pois:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para que a *equação* tenha **solução** é necessário verificar-se:

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

c) *Equações biquadradas*

Para a solução deste tipo de equações, depois da equação ter sido reduzida à sua *forma canónica*, faça-se $x = \pm \sqrt{y}$

Teremos então:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \leftrightarrow ay^2 + by + c = 0$$

Resolvendo esta *equação em ordem a y*, utilizando a *fórmula resolvente das equações do segundo grau*, obtêm-se as raízes x_1 e y_2 .

As **raízes** da *equação biquadrada* são pois:

$$y_1 = \sqrt{y_1}; y_2 = -\sqrt{y_1}; y_3 = \sqrt{y_2}; y_4 = -\sqrt{y_2}$$

Para que a equação tenha solução é **necessário verificar-se**:

$$y_1 \geq 0 \wedge y_1 \geq 0$$

3.5. RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES

Para **inequações** com *formas canónicas semelhantes às equações referidas em 4*, **resolve-se a relação como se fosse uma equação**, cuja(s) raiz(es) definem os *extremos inferior e/ou superior dos intervalos dos valores de x* que satisfazem à relação.

Exemplos

1) $ax + b > 0 \leftrightarrow x > -b/a$

As *raízes da inequação* estão compreendidas no *intervalo* $]-b/a, +\infty [$.

2) $ax - b \leq 0 \leftrightarrow x \leq b/a$

3) Na primeira equação substitui-se x pelo valor encontrado no passo 2).

$$ax + by + c = 0 \leftrightarrow a\left(\frac{\frac{ce}{b} + f}{d - \frac{ae}{b}}\right) + by + c = 0 \leftrightarrow by = -c - \left(\frac{\frac{ce}{b} + f}{d - \frac{ae}{b}}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y = \frac{-c - \left(\frac{\frac{ce}{b} + f}{d - \frac{ae}{b}}\right)}{b}$$

Este valor de y é a **outra raiz do sistema**.

3.8. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere-se o circuito eléctrico representado na Figura 3.3, onde:

- Carga: 3000 W / 230 V; factor de potência = 0,79.
- $R_1 = 3,87 \, \Omega$
- $R_2 = 0,25 \, \Omega$
- $I_3 = 4 \, A$
- $I_4 = 8,06 \, A$

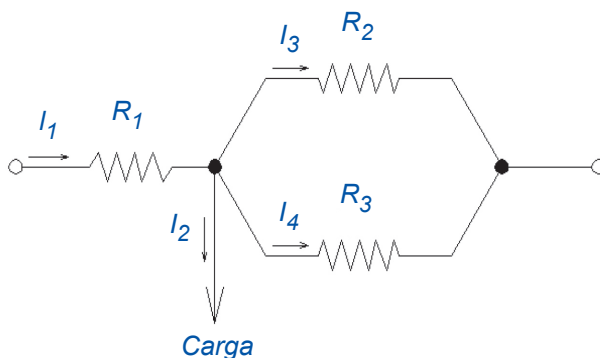


Figura 3.3 – Circuito eléctrico

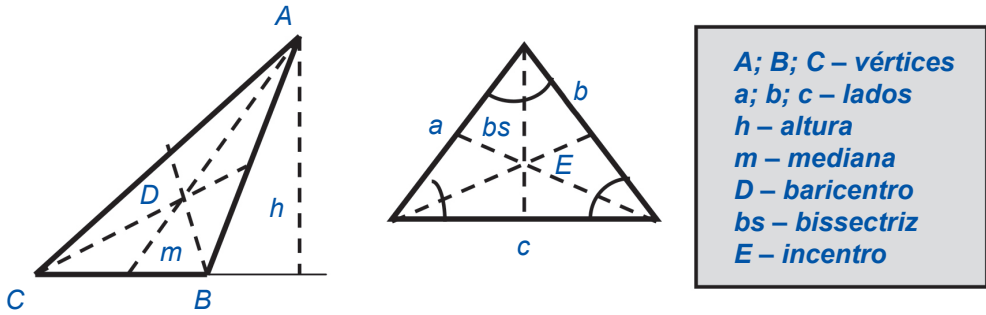


Figura 4.4 – Elementos notáveis do triângulo

d) Resolução de triângulos

A designada **resolução de triângulos** é um conjunto de fórmulas que permitem determinar os valores dos ângulos, dos lados e de outros elementos notáveis, recorrendo a conceitos de geometria e de trigonometria (ver Capítulo 7).

Atente-se na Figura 4.5:

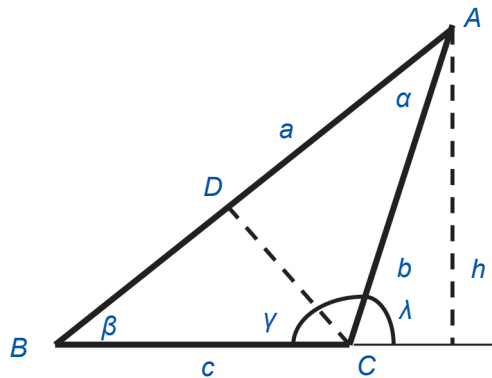


Figura 4.5 - Triângulo

As fórmulas utilizadas para **resolver** o triângulo são:

- 1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- 2) $\lambda = \alpha + \beta$
- 3) $h = c \times \text{sen}(180^\circ - \gamma)$

x é designado como o **domínio** de $f(x)$ e y como o seu **contra-domínio**; x designa-se como **argumento** da função.

Considerando o *universo dos números reais* ou os seus sub-conjuntos, as *funções* no plano XY são representadas por um conjunto de **pares ordenados** do tipo (x_1, y_1) , designado por **coordenadas**, em que x_1 é um elemento do *domínio* e designado por **abscissa** e y_1 um elemento do *contra-domínio* e designado por **ordenada**; nesse plano as funções podem ser representadas por *gráficos*.

Para um melhor entendimento da **diferença entre aplicação e função**, considerem-se as equações $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = x^2$, cujos gráficos no plano XY representam uma *circunferência* e uma *parábola*, respectivamente.

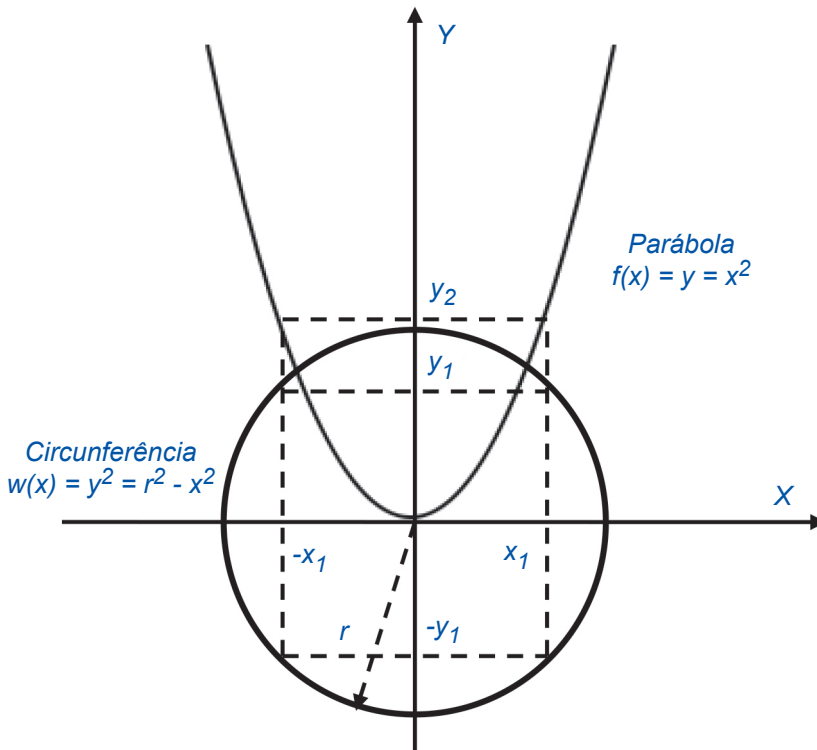


Figura 5.1 – Gráficos das equações $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = x^2$

Da análise dos gráficos da Figura 5.1 pode concluir-se

- $w(x_1) = y_1 \wedge w(x_1) = -y_1$
- $w(x_2) = y_1 \wedge w(x_2) = -y_1$
- $f(x_1) = f(x_2) = y_2$

$w(x)$ não é uma *função* (é uma **aplicação**) e $f(x)$ é uma *função*.

- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [\log_a f(x)] = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} r^{f(x)} = r^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
- Sendo $f'(x)$ a *função derivada*²³ de $f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ – regra de l' Hospital.

5.5. CÁLCULO DE LIMITES E INDETERMINAÇÕES

Quando se calculam **limites** podem surgir *expressões* do tipo $k / 0$, $k / +\infty$, $k / -\infty$, $\infty - \infty$, $0 / 0$, 0^0 , $0 / \infty$, $\infty / 0$, 1^∞ e ∞^0 , sendo k uma constante.

Por convenção define-se:

- $\forall x \neq 0, x^0 = 1$
- $\forall k \neq 0$ e constante, $k / 0 = +\infty$, se $x \rightarrow 0^+$
- $\forall k \neq 0$ e constante, $k / 0 = -\infty$, se $x \rightarrow 0^-$
- $\forall k \neq 0$ e constante, $(k / +\infty) = (k / -\infty) = 0$

As expressões $(\infty - \infty)$, $(0 / 0)$, $(0 / \infty)$, $(\infty / 0)$, 0^0 , 1^∞ e ∞^0 designam-se por **indeterminações**, sendo necessário resolver cada uma destas situações caso a caso, segundo regras pré-estabelecidas, algumas das quais recorrem à *regra de l' Hospital*; esta operação é habitualmente designada por “*levantar a indeterminação*”.

Vejam-se agora os **valores dos limites** de *diversos tipos de funções*:

1) Função polinomial do tipo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, se $a_n > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, se $a_n < 0$ e n for um número par.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, se $a_n < 0$ e n for um número ímpar.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, se $a_n < 0$ e n for um número par.

²³ Ver o Capítulo 10.

8.3. APLICAÇÕES TÍPICAS

Uma das aplicações típicas dos vectores em *Engenharia Electrotécnica* é a representação de *grandezas eléctricas*, sendo as mais usuais as seguintes:

A. *Tensões e correntes dos sistemas trifásicos.*

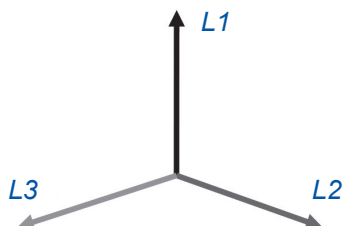


Figura 8.5 – Representação vectorial de tensões e correntes

B. *Desfasagem entre tensões e correntes.*

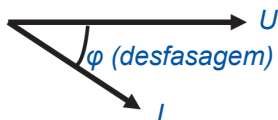


Figura 8.6 – Representação vectorial da desfasagem entre tensão e corrente (corrente em atraso)

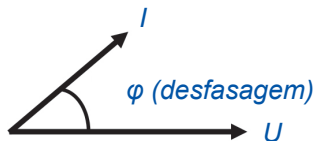


Figura 8.7 – Representação vectorial da desfasagem entre tensão e corrente (corrente em avanço)

CAPÍTULO 10 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Temas do Capítulo

Derivada de Uma Função – Definição e Conceitos Gerais

Teoremas de Lagrange, Rolle e Cauchy

Propriedades das Derivadas

Equações Diferenciais

Integral de Uma Função – Definição e Conceitos Gerais

Generalização do Conceito de Integral

Relação Entre os Conceitos de Derivada e de Integral – Primitivas

10.1. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO – DEFINIÇÃO E CONCEITOS GERAIS

Considere-se a função $f(x)$ de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; define-se derivada dessa função em ordem a x como a função definida pela expressão:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A derivada de $f(x)$ em qualquer ponto do seu domínio⁴⁴ ($\mathbf{A}$) representa a taxa de variação da função naquele ponto. Se o limite acima indicado existir $\forall x \in \mathbf{D}$, a função diz-se que é **derivável** ou **diferenciável** em $\mathbf{A}$. A derivada de uma função em qualquer ponto do seu domínio representa a **tangente** ao gráfico da função naquele ponto e o valor de x – ver Figura 10.1.

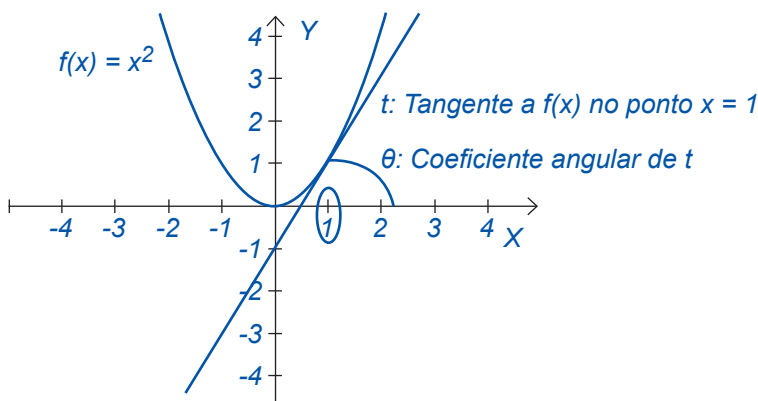


Figura 10.1 – Gráfico da função x^2

⁴⁴ Ver Capítulo 5.

Se a equação envolver *uma ou mais funções e as suas derivadas parciais*, como é o caso das *equações de Maxwell*⁵⁰, designa-se como **equação de derivadas parciais** ou **equação diferencial parcial**, e de que se apresenta um exemplo (seja $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

As *equações diferenciais ordinárias* classificam-se por **ordem**, de acordo com a **ordem mais elevada** da *derivada* que constitui um dos termos da equação. No primeiro exemplo deste ponto a *equação* diz-se de **primeira ordem**, ou **equação diferencial linear**, enquanto no exemplo seguinte a equação diz-se de **terceira ordem**:

$$x^2 + \frac{d^3 y}{dx^3} - 5x^2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Generalizando se um dos termos da *equação* for a *derivada de ordem n*, a equação diz-se ser uma **equação diferencial de ordem n**, ou **equação diferencial não-linear**.

As *equações diferenciais lineares* dizem-se **homogéneas**, se a **soma das suas raízes (soluções)** ou os seus **múltiplos** *forem também uma solução da equação*; os coeficientes dos termos com derivadas podem ser *funções de variável independente, variáveis ou constantes*.

Tal como nas *equações algébricas*⁵¹, também as *equações diferenciais* podem constituir um *sistema de equações*, como se mostra no exemplo seguinte:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 3y = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + x = 0 \end{cases}$$

A **resolução** de *equações diferenciais* é realizada por meio de **integração**, tema que será objecto de análise nos pontos subsequentes deste capítulo, ou por recurso à **transformada de Laplace**⁵².

⁵⁰ Ver Capítulo 12.

⁵¹ Ver Capítulo 3.

⁵² Ver Capítulo 14.

Considere-se agora a seguinte *matriz* de 3×3 :

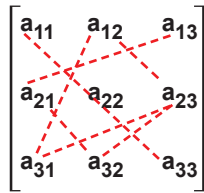
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

O seu *determinante* é calculado pela expressão:

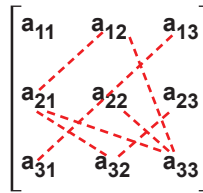
$$|A| = [(a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32})] - [(a_{31} \times a_{22} \times a_{13}) + (a_{32} \times a_{23} \times a_{11}) + (a_{33} \times a_{21} \times a_{12})]$$

Observando a *matriz* anterior pode-se concluir quais são as **diagonais positivas e negativas**, para cálculo do *determinante*:

Diagonais Positivas



Diagonais Negativas



Para o cálculo do *determinante* de *matrizes* de $n \times n$, em que $n \geq 4$, utiliza-se o **teorema de Laplace**, cujo enunciado é o seguinte:

*“O determinante de uma matriz é igual à soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos **complementos algébricos**”.*

Define-se **complemento algébrico** de qualquer *elemento* a_{ij} de uma *matriz quadrada* A de $n \times n$, como o número A_{ij} calculado pela seguinte expressão:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times |A'|$$

Onde $|A'|$ é o *determinante da matriz* (A') que resulta da supressão da linha e da coluna da matriz A que contenha o elemento a_{ij} .

Exemplo

Considerando $a_{ij} = a_{12}$ na matriz A abaixo indicada, a matriz A' é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

É habitual dividir as *equações de Maxwell* em dois regimes: o regime “**microscópico**” ou **equações no vácuo** e o regime “**macroscópico**” ou **equações gerais**. Na Tabela 12.1 indicam-se as leis atrás referidas e as respectivas *equações de Maxwell* nos dois regimes.

Tabela 12.1 – Equações de Maxwell

Designação da Lei	Equações de Maxwell	
	Equações no vácuo	Equações gerais
Lei de Gauss	$\text{div } E = \rho / \epsilon_0$	$\text{div } D = \rho$
Lei de Gauss para o magnetismo	$\text{div } B = 0$	$\text{div } B = 0$
Lei de Faraday (da indução)	$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$
Lei de Ampère (com a correcção de Maxwell)	$\text{rot } B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$	$\text{rot } B = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

O significado das grandezas das *equações de Maxwell* e as respectivas unidades, no **Sistema Internacional de Unidades (SI)** indicam-se na Tabela 12.2.

Tabela 12.2 – Definição das grandezas das equações de Maxwell

Símbolo	Grandeza	Unidade
E	Campo eléctrico	volt por metro ⁷³ (V/m)
B	Densidade de fluxo magnético ou indução magnética	tesla (T)
D	Campo de deslocamento eléctrico	coulomb ⁷⁴ por metro quadrado (C/m ²)
J	Densidade de corrente	ampère por metro quadrado (A/m ²)
ρ	Densidade de carga	coulomb por metro cúbico (C/m ³)
ϵ_0	Permissividade ou capacidade específica do vácuo	farad por metro (F/m)
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo	henry por metro (H/m)
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial em ordem ao tempo	-----

73 De acordo com o SI o nome das grandezas, qualquer que seja, é sempre escrito com letras minúsculas.

74 *coulomb*: unidade de carga eléctrica; *farad*: unidade de capacidade electrostática; *henry*: unidade de indutância. Nota: O nome das unidades é sempre escrito com letras minúsculas.

4) **Probabilidade condicionada** de **A** se *verificar* se o acontecimento **B** se *verificar*:

$$P(A | B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(B | A) \times P(A)}{P(B)}$$

5) $P(A \wedge B) = P(A | B) \times P(B) = P(B | A) \times P(A)$, sendo **A** e **B** acontecimentos **não independentes**.

6) **Probabilidade inversa** de **A**: $P(A^C) = 1 - P(A)$.

7) Sendo **A** e **B** acontecimentos pertencentes a *conjuntos disjuntos*⁸², $P(A \wedge B) = 0$.

8) Considerando o conjunto dos *acontecimentos elementares* A_i num universo U finito e $P(A_i)$ a *probabilidade* de esses acontecimentos se verificarem:

$$\sum_{i=1}^n P(A(i)) = 1$$

9) Sendo A_1 e A_2 conjuntos de *acontecimentos* no universo U , constituídos por *acontecimentos elementares* A_i se $A_i \in A_1 \cap A_2$, então:

$$P(A_1 \wedge A_2) = \sum_{i=1}^n P(A(i)) \text{ [se } A_1 \cap A_2 = \Phi, \text{ então } P(A_1 \wedge A_2) = 0]$$

10) Nas condições enunciadas no número anterior se $A_i \in A_1 \cup A_2$, então:

$$P(A_1 \vee A_2) = \sum_{i=1}^n P(A(i))$$

15.4. TEORIA DAS PROBABILIDADES

As *probabilidades* dos *acontecimentos* têm habitualmente uma **distribuição tipificada** que é estudada na **teoria das probabilidades**, o *ramo da matemática* que estuda as *probabilidades* e os *acontecimentos aleatórios*. Para uma melhor compreensão deste tema relembre-se alguns conceitos fundamentais, que serão retomados no estudo da **estatística**.

A **distribuição de probabilidade** é um *conceito estatístico* (ver ponto 6) que atribui a cada conjunto mesurável a *probabilidade* de ocorrência de qualquer **acontecimento aleatório**. Esta *probabilidade* é uma *função* $F(x)$, cujo *domínio* é o conjunto mesurável e cujo *contra-domínio*⁸³ está incluído no *intervalo* $[0, 1]$.

⁸² Ver Capítulo 1.

⁸³ Ver Capítulo 5.

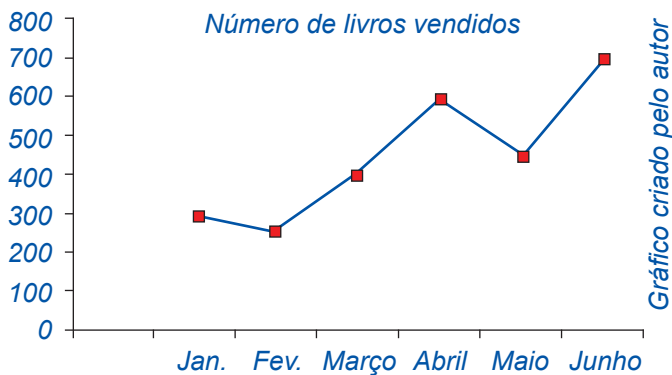


Figura 15.10 – Gráfico de segmentos

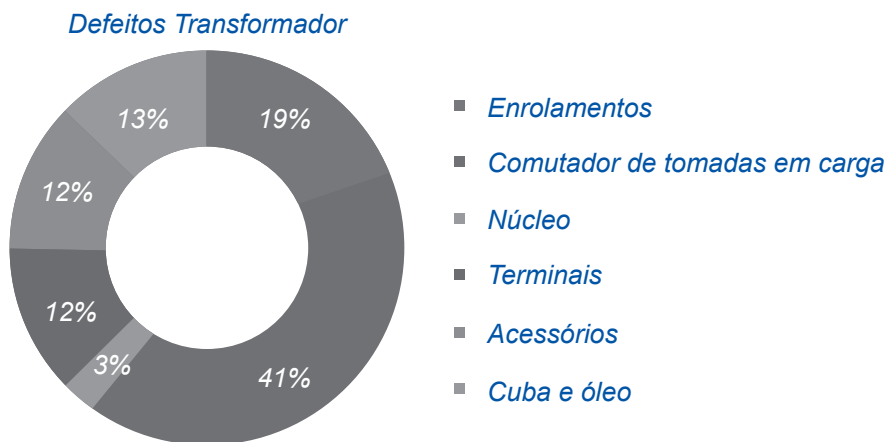


Figura 15.11 – Gráfico sectorial

15.7. MEDIDAS DE DISPERSÃO

Em estatística as **medidas de dispersão** são utilizadas para verificar se os valores alcançados estão próximos ou afastados da **média** da *distribuição probabilística* (ver ponto 4). Para além da *média* ($E(X)$), *variância* ($Var(X)$) e do *desvio padrão* (σ), já abordados no referido ponto 4, as outras medidas de dispersão utilizadas são o **desvio médio** e o **coeficiente de variação**.

Bases de Matemática para engenheiros electrotécnicos

MANUEL BOLOTINHA

Sobre a obra

A matemática é uma ferramenta indispensável à engenharia, designadamente a electrotécnica, sendo imprescindível o conhecimento das bases e dos princípios dos vários temas matemáticos.

Esse conhecimento é fundamental para que não haja dúvidas nem erros na opção pela escolha e pela utilização do princípio matemático que deve ser usado em cada problema profissional que temos que resolver, designadamente os cálculos a efectuar e a elaboração de algoritmos, sendo também relevante a sua utilização para a definição das leis específicas.

Este último livro tem como objectivo recordar os princípios básicos da matemática, permitir um entendimento das principais leis e apresentar exemplos típicos de utilização da generalidade dos temas abordados.

Sobre o autor

Manuel Bolotinha, MSc, licenciou-se em 1974 em Engenharia Electrotécnica (Ramo de Energia e Sistemas de Potência) no Instituto Superior Técnico – Universidade de Lisboa (IST/UL), onde foi Professor Assistente, e obteve o grau de Mestre em Abril de 2017 em Engenharia Electrotécnica e de Computadores na Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL).

Tem desenvolvido a sua actividade profissional nas áreas do projecto, fiscalização de obras e gestão de contratos de empreitadas designadamente de projectos de geração e transporte de energia, instalações industriais e infra-estruturas de distribuição de energia, aero-portuárias e ferroviárias, não só em Portugal, mas também em África, na Ásia e na América do Sul.

Membro Sénior da Ordem dos Engenheiros, é também Formador Profissional, credenciado pelo IEFP, tendo conduzindo cursos de formação, de cujos manuais é autor, em Portugal, África e Médio Oriente.

É também autor de diversos artigos técnicos publicados em Portugal e no Brasil e de livros técnicos, em português e inglês, e tem proferido palestras na OE, ANEP, FCT-UNL, IST e ISEP.

Parceiro de Comunicação

o electricista 

Também disponível em formato papel



ISBN: 978-989-917-792-5



www.quanticaeditora.pt