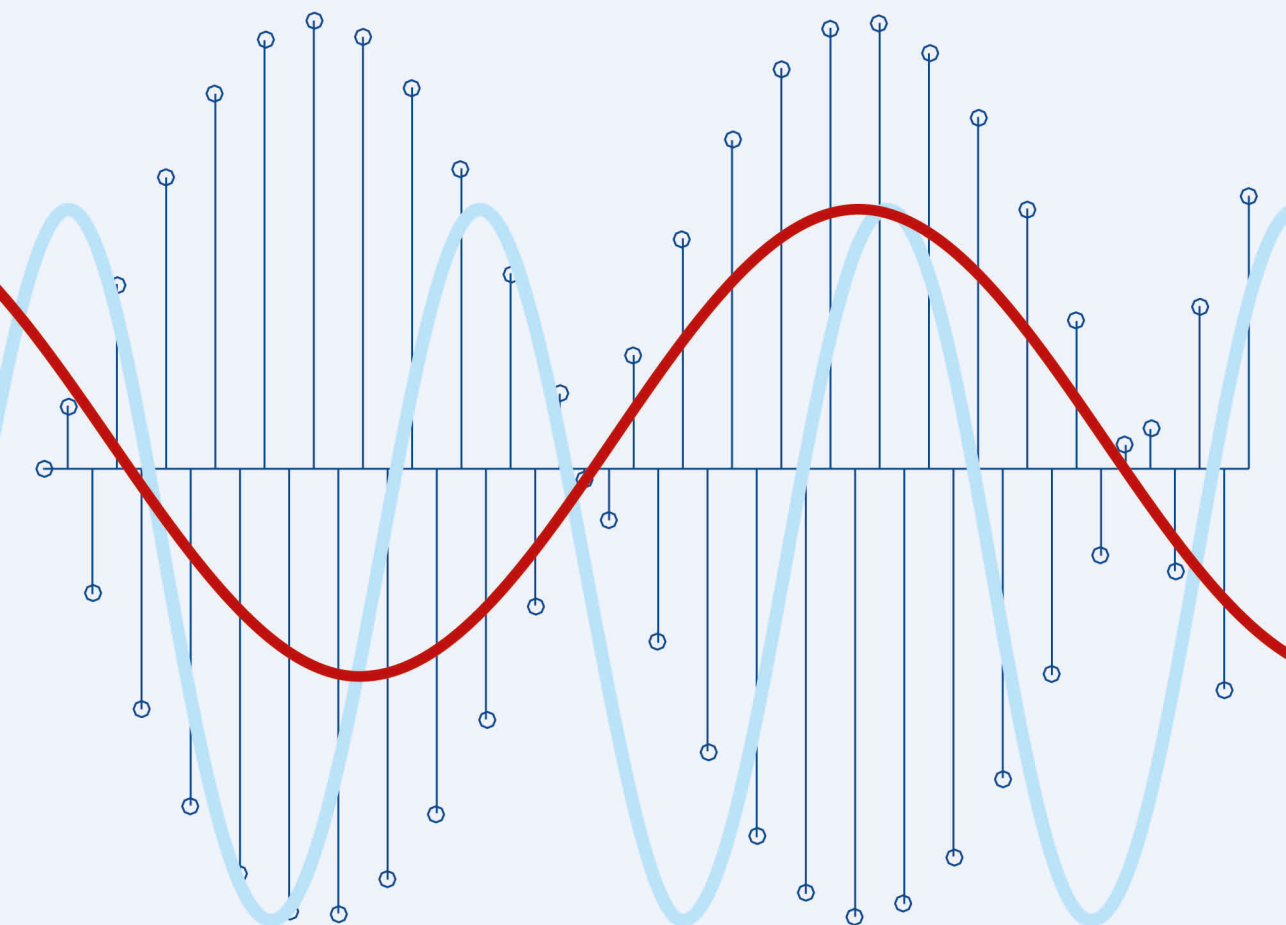


Introdução à Teoria de

SINAIS E SISTEMAS

ANTÓNIO JOAQUIM SERRALHEIRO



AUTOR

António Joaquim Serralheiro

TÍTULO

INTRODUÇÃO À TEORIA DE SINAIS E SISTEMAS

EDIÇÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt

CHANCELA

Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO

Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

REVISÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

DESIGN

Delineatura – Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO

Julho, 2023

DEPÓSITO LEGAL

518096/23



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2023 | Todos os direitos reservados Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, é ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Por opção do autor, este livro não segue o novo Acordo Ortográfico de 1990.

CDU
621.3 Engenharia eléctrica

ISBN
Papel: 9789899101937
E-book: 9789899101920

Catálogo da publicação
Família: Eletrotécnica
Subfamília: Análise de circuitos e sinais

ÍNDICE

PREFÁCIO	xi
1 INTRODUÇÃO AOS SINAIS E SISTEMAS	19
1.1 INTRODUÇÃO AOS SINAIS	19
1.1.1 TIPOS DE SINAIS	21
1.1.2 EXEMPLOS DE SINAIS	22
1.1.3 CARACTERÍSTICAS DE SINAIS	25
1.1.4 TRANSFORMAÇÕES DA VARIÁVEL INDEPENDENTE	34
1.1.5 EXEMPLOS DE SINAIS DE INTERESSE	35
1.2 CARACTERIZAÇÃO DE SINAIS PERIÓDICOS	48
1.2.1 SÉRIE TRIGONOMÉTRICA OU HARMÓNICA DE FOURIER	51
1.2.2 CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DA SÉRIE DE FOURIER	56
1.2.3 SÉRIE DE FOURIER PARA SINAIS DISCRETOS	58
1.3 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS	60
1.3.1 CARACTERÍSTICAS DE SISTEMAS	62
1.3.2 RESPOSTA IMPULSIVA	67
1.3.3 DETERMINAÇÃO DA SAÍDA: SISTEMAS LINEARES	68
1.3.4 DETERMINAÇÃO DA SAÍDA: SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO	70
1.3.5 RESPOSTA IMPULSIVA DE SISTEMA ESTÁVEL	81
1.3.6 DETERMINAÇÃO DA SAÍDA: FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	82
1.3.7 CARACTERIZAÇÃO DE SLIT ATRAVÉS DE EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS E DIFERENCIAIS	83
1.3.8 MODELO DE ESTADO	92
1.3.9 SOLUÇÃO DO MODELO DE ESTADO (tempo contínuo)	94
1.3.10 INTRODUÇÃO À LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	102
1.4 PROBLEMAS RESOLVIDOS	107

2	TRANSFORMADA DE LAPLACE	129
2.1	INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA DE LAPLACE	129
2.1.1	DEFINIÇÃO DE TRANSFORMADA DE LAPLACE	129
2.1.2	EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	130
2.1.3	RESPOSTA DE SLIT A ENTRADA EXPONENCIAL COMPLEXA	131
2.1.4	PROPRIEDADES DA REGIÃO DE CONVERGÊNCIA	136
2.1.5	PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	139
2.1.6	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	140
2.2	TRANSFORMADAS UNILATERAIS DE LAPLACE	143
2.2.1	TRANSFORMADAS UNILATERAIS DE LAPLACE	143
2.2.2	TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE	144
2.2.3	PROPRIEDADES DA TULD	144
2.3	INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	145
2.3.1	EXPANSÃO EM FRACÇÕES SIMPLES	146
2.3.2	EXISTÊNCIA DE RAÍZES MÚLTIPLAS	147
2.3.3	GRAU DO POLINÓMIO NUMERADOR MAIOR OU IGUAL AO GRAU DO POLI- NÓMIO DENOMINADOR	150
2.3.4	TABELAS DAS PROPRIEDADES E PARES DE TRANSFORMADA DE LAPLACE	152
2.4	DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE SLIT	153
2.4.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	154
2.4.2	MODELO DE ESTADO	158
2.4.3	IMPOSIÇÃO DE CONDIÇÕES INICIAIS	167
2.4.4	REGIMES FORÇADO, HOMOGÉNEO E SUPRESSÃO DO TRANSITÓRIO INICIAL	170
2.5	PROBLEMAS RESOLVIDOS	174
3	TRANSFORMADA Z	199
3.1	INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA Z	199
3.1.1	DEFINIÇÃO DE TRANSFORMADA Z	199
3.1.2	EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA Z	200
3.1.3	RESPOSTA DE SLIT A ENTRADA EXPONENCIAL COMPLEXA	201
3.2	CONVERGÊNCIA DA TRANSFORMADA Z	202
3.2.1	PROPRIEDADES DA REGIÃO DE CONVERGÊNCIA	207
3.2.2	PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA Z	209
3.3	TRANSFORMADAS Z UNILATERAIS	211
3.3.1	TRANSFORMADAS Z UNILATERAIS	211

3.3.2	PROPRIEDADES DA TZUD	212
3.4	INVERSÃO DA TRANSFORMADA Z	213
3.4.1	EXPANSÃO EM FRACÇÕES SIMPLES	214
3.4.2	EXISTÊNCIA DE RAÍZES MÚLTIPLAS	217
3.4.3	GRAU DO POLINÓMIO NUMERADOR MAIOR OU IGUAL AO GRAU DO POLI- NÓMIO DENOMINADOR	221
3.4.4	TABELAS DAS PROPRIEDADES E PARES DE TRANSFORMADA Z	222
3.5	A TZ NA DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE SLIT	225
3.5.1	EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS E FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	225
3.5.2	MODELO DE ESTADO	226
3.5.3	EXISTÊNCIA DE ZEROS	231
3.5.4	IMPOSIÇÃO DE CONDIÇÕES INICIAIS	234
3.6	PROBLEMAS RESOLVIDOS	236
4	TRANSFORMADA DE FOURIER	259
4.1	TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO CONTÍNUO	259
4.1.1	DEFINIÇÃO DE TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO CONTÍNUO	259
4.1.2	TRANSFORMADA DE LAPLACE E TRANSFORMADA DE FOURIER	260
4.1.3	PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER	261
4.1.4	EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE FOURIER	263
4.1.5	TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS PERIÓDICOS	264
4.1.6	TRANSFORMADA DE FOURIER DO ESCALÃO UNITÁRIO	266
4.1.7	PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER	267
4.2	INTRODUÇÃO À TF EM TEMPO DISCRETO	268
4.2.1	DEFINIÇÃO DE TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO	268
4.2.2	EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO	272
4.2.3	PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO	272
4.2.4	PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER EM TEMPO DISCRETO	273
4.3	INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	275
4.3.1	DEFINIÇÃO DE TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	275
4.3.2	A DFT COMO TRANSFORMAÇÃO LINEAR	280
4.3.3	PROPRIEDADES DA DFT	282
4.3.4	PARES DE TRANSFORMADAS DISCRETAS DE FOURIER	289
4.3.5	A FFT - <i>Fast Fourier Transform</i>	290
4.4	PROBLEMAS RESOLVIDOS	301

5	RESPOSTA NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA	319
5.1	RESPOSTA TRANSITÓRIA	319
5.1.1	SLIT EM TEMPO DISCRETO	323
5.1.2	MODELO DE ESTADO	334
5.1.3	SLIT EM TEMPO CONTÍNUO	343
5.1.4	MODELO DE ESTADO	359
5.2	RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE SINUSOIDAL	372
5.2.1	SLIT DISCRETOS	372
5.2.2	SLIT CONTÍNUOS	374
5.2.3	FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	375
5.3	RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SLIT DISCRETOS	375
5.3.1	CASO GERAL	375
5.3.2	SLIT FIR DE FASE LINEAR	378
5.4	RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SLIT CONTÍNUOS	385
5.4.1	DIAGRAMAS DE BODE	385
5.4.2	OUTRAS REPRESENTAÇÕES	387
5.4.3	DIAGRAMAS DE BODE DE FACTORES ELEMENTARES	390
5.4.4	DESENHO DE DIAGRAMAS DE BODE	405
5.4.5	SLIT DE FASE NÃO-MÍNIMA	417
5.5	ESTABILIDADE DE SLIT CONTÍNUOS E CAUSAIS	425
5.5.1	CRITÉRIO DE HURWITZ	425
5.5.2	TABELA DE ROUTH	427
5.6	PROBLEMAS RESOLVIDOS	435
6	AMOSTRAGEM DE SINAIS	461
6.1	INTRODUÇÃO À AMOSTRAGEM UNIFORME	461
6.1.1	AMOSTRAGEM IDEAL	461
6.1.2	AMOSTRAGEM COM RETENÇÃO DE ORDEM ZERO	463
6.2	TRANSFORMADA DE LAPLACE DE SINAIS AMOSTRADOS	466
6.2.1	AMOSTRAGEM IDEAL	466
6.2.2	AMOSTRAGEM COM RETENÇÃO DE ORDEM ZERO	467
6.3	TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS AMOSTRADOS	469
6.3.1	AMOSTRAGEM IDEAL	469
6.3.2	AMOSTRAGEM COM RETENÇÃO DE ORDEM ZERO	476
6.4	RECONSTRUÇÃO DE SINAIS	478

6.4.1	AMOSTRAGEM IDEAL	478
6.4.2	AMOSTRAGEM COM RETENÇÃO DE ORDEM ZERO	480
6.5	PROBLEMAS RESOLVIDOS	481
7	FILTROS ANALÓGICOS E DIGITAIS	487
7.1	ESPECIFICAÇÕES DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	487
7.1.1	INTRODUÇÃO	487
7.1.2	MÓDULO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA: RESPOSTA DE AM- PLITUDE	488
7.1.3	ARGUMENTO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA: RESPOSTA DE FASE	489
7.2	FILTRAGEM ANALÓGICA OU EM TEMPO CONTÍNUO	493
7.2.1	FILTRAGEM IDEAL PASSA-BAIXO	494
7.2.2	APROXIMAÇÃO DE BUTTERWORTH AO FILTRO IDEAL	496
7.2.3	APROXIMAÇÃO DE TCHÉVISCHEV AO FILTRO IDEAL	502
7.2.4	TRANSFORMAÇÕES NA FREQUÊNCIA	510
7.2.5	IMPLEMENTAÇÃO	519
7.3	INTRODUÇÃO À FILTRAGEM EM TEMPO DISCRETO	531
7.3.1	FILTROS IIR: MÉTODO DO IMPULSO INVARIANTE	531
7.3.2	FILTROS IIR: MÉTODO DO ESCALÃO INVARIANTE	536
7.3.3	FILTROS IIR: MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO BILINEAR	538
7.3.4	FILTROS FIR	540
7.4	PROBLEMAS RESOLVIDOS	544
ANEXOS		DLIX
I	DOS CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA	DLXI
II	SOBRE O INTEGRAL DE EULER-POISSON	DLXXXI
III	SOBRE A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE	DLXXXIII
IV	SOBRE A APROXIMAÇÃO DE PADÉ AO ATRASO NO TEMPO	DLXXXVII
V	SOBRE O TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON	DXCIII
	BIBLIOGRAFIA	DXCIX
	ÍNDICE DE FIGURAS	DCI
	ÍNDICE DE TABELAS	DCXVII

e, para tal seja a exponencial complexa,

$$e^{j(\Omega n + \theta)} = e^{j(\Omega n + 2\pi k + \theta)} \quad (1.16)$$

uma vez que $\forall n, k \in \mathbb{Z}$ se tem

$$e^{j(\Omega n + 2\pi k + \theta)} = e^{j(\Omega n + \theta)} \cdot \underbrace{e^{j2\pi k}}_{=1} = e^{j(\Omega n + \theta)}$$

mesmo que $x(n)$ não seja periódico^a.

□ O resultado acima mostra que, em tempo discreto, não é possível distinguir duas exponenciais complexas *distanciadas* de $2k\pi$ radianos.

^aVeremos mais adiante que, neste caso, o sinal só é periódico se e só se Ω for uma fração racional de π .

Exemplo: Mostre que $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ é um sinal periódico e determine o seu período fundamental.

Resolução: $x(t)$ a ser periódico tem de verificar a equação (1.14), logo

$$x(t) = x(t + T) \iff \cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0(t + T))$$

o que, usando uma identidade trigonométrica bem conhecida, resulta em

$$\cos(\omega_0(t + T)) = \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 T) - \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 T)$$

Ora, esta igualdade é verificada $\forall t$ se só se (sse) $\sin(\omega_0 T) = 0$ e, simultaneamente, $\cos(\omega_0 T) = 1$, o que se consegue para $\forall k \in \mathbb{Z}$ sse $T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$.

O período fundamental é

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

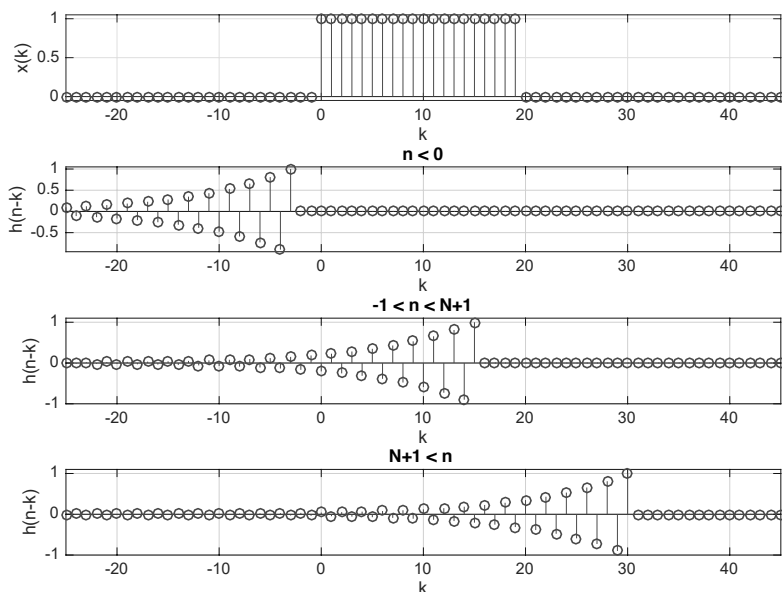


Figura 1.66. Sinais $h(n)$ (em cima), $x(n)$ (ao centro) e, em baixo, o sinal $h(n)*x(n)$, sendo $a = -0,9$ e $N = 20$.

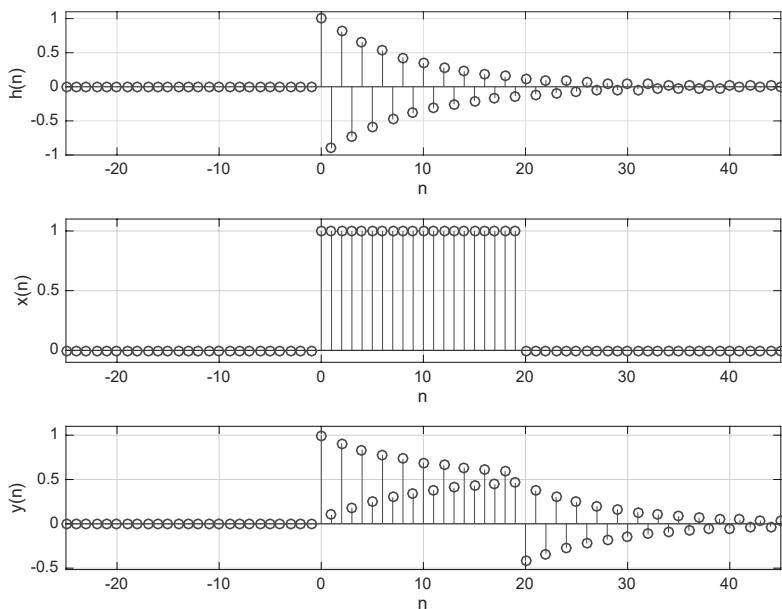


Figura 1.67. Sinais $h(n)$ (em cima), $x(n)$ (ao centro) e, em baixo, o sinal $h(n)*x(n)$, sendo $a = -0,9$ e $N = 20$.

Resolução: Começemos por determinar os pólos de $G(s)$ (cujas partes reais irão delimitar a(s) RdC),

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

E, dado que $a(s)$ não pode conter pólo(s), teremos 3 possibilidades,

- RdC A: $\text{Re}\{s\} < -2$ $h(t)$ é (sinal) esquerda ou seja, SLIT não causal ou anti-causal;
- RdC B: $-1 < \text{Re}\{s\} < -2$ $h(t)$ é (sinal) bilateral ou seja, SLIT não causal;
- RdC C: $\text{Re}\{s\} > -1$ $h(t)$ é (sinal) direita ou seja, SLIT causal.

a que corresponderão, forçosamente, 3 tipos de SLIT, conforme se assinalou e que se representam na figura 2.14.

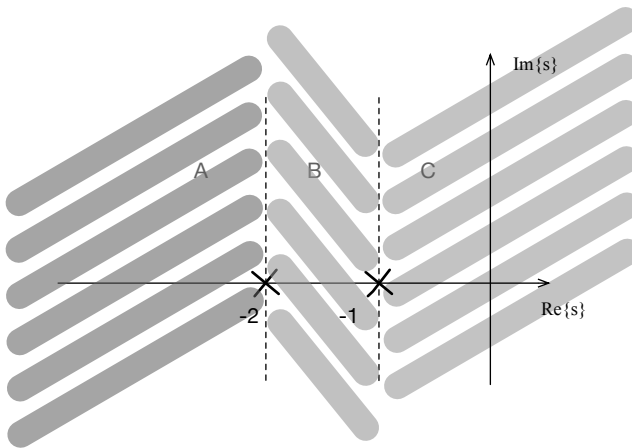


Figura 2.14. Mapa de pólos-zeros de $G(s)$, assinalando-se as 3 RdC correspondentes (ver texto).

□

(c) mostre que a resposta impulsiva do SLIT causal é $g(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] \cdot u(t)$;

T 54 Teorema: *Convolução,*

$$\begin{aligned} R_1 : x_1(n) &\leftrightarrow X_1(z) \\ R_2 : x_2(n) &\leftrightarrow X_2(z) \end{aligned} \rightarrow R \supseteq R_1 \cup R_2 : x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (3.19)$$

T 55 Teorema: *Diferenciação em z, ou no domínio da transformada,*

$$R_1 : x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \rightarrow R \equiv R_1 : -n \cdot x_1(n) \leftrightarrow z \frac{d}{dz} X_1(z) \quad (3.20)$$

T 56 Teorema: *Valor inicial de x(n) (considerando $\forall n < 0 : x(n) = 0$)*

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.21)$$

Uma demonstração deste teorema é relativamente trivial; assim, pela definição de TZ,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}$$

e, tomando o limite quando $z \rightarrow +\infty$, teremos

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = x(0) + \underbrace{\lim_{z \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^n}}_{=0}$$

Basta re-escrever a equação acima e obteremos a prova desejada,

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$$

T 57 Teorema: *Valor final de x(n) (considerando $\forall n < 0 : x(n) = 0$)*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (3.22)$$

Uma demonstração deste teorema é seguidamente apresentada; dado que

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x(n) \cdot z^{-n}$$

Aplicando a propriedade da translação à equação anterior,

$$z^{-1} \cdot X(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x(n-1) \cdot z^{-n}$$

Naturalmente que todo o sinal periódico não poderá ser de norma \mathcal{L}^1 ... e como tal não terá transformada de Fourier *in stricto sensu*. Uma forma de rodear este problema consiste em representar o sinal periódico pela sua série trigonométrica e, depois, tentar obter a transformada de Fourier ou da exponencial complexa ou, de forma equivalente, das funções sinusoidais.

Outra forma de encarar as questões da existência da transformação de Fourier de um dado sinal, consiste em encarar esta transformada como um caso particular da transformação de Laplace. Ora, se a região de convergência desta transformada incluir o eixo imaginário, então, forçosamente a transformada de Fourier desse sinal é diferente de infinito. Para verificar esta afirmação, basta recordar que $\text{TF}[x(t)] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \text{TL}[x(t)]$. Claro que as funções sinusoidais cujas transformadas de Laplace incluem pólos sobre o eixo imaginário estarão excluídas da classe de funções com transformada de Fourier... ou não?

4.1.5 TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS PERIÓDICOS

Embora estes sinais não verifiquem as condições suficientes da existência da transformada de Fourier, podemos tentar resolver este problema de outra forma. Assim, comecemos por ver qual a transformada de Fourier da exponencial complexa.

Transformada de Fourier da Exponencial Complexa

Tentemos determinar, pela definição, a transformada seguinte

$$\text{TF}[e^{j\omega_1 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_1 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_1)t} dt$$

É fácil de ver que este integral é indeterminado. Como ultrapassar esta dificuldade? Admitamos a existência de transformadas *impulsivas*, ou seja, exista $X(j\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega)$ como sendo a transformada de um dado sinal $x(t)$; qual é esse sinal? Então

$$x(t) = \text{TF}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Dadas as propriedades do impulso de Dirac, é fácil de ver que, neste exemplo, $x(t) = 1$.

estaremos a solicitar o sistema com uma única frequência. Se optássemos por utilizar, por exemplo, uma onda dente-de-serra, sabemos da análise de Fourier que essa onda contém não uma única frequência mas, antes pelo contrário, uma infinidade de frequências (as harmônicas). E, conseqüentemente, a resposta do SLIT seria uma combinação linear de infinitas respostas forçadas a cada uma das harmônicas do sinal de entrada... e não apenas uma única resposta forçada!

Seja, então, $x_i(t) = X_i \cos(\omega_i t)$ um sinal sinusoidal de amplitude X_i e frequência ω_i usado como sinal de entrada dum SLIT de resposta impulsiva $h(t)$. Sendo, como veremos, $\cos(\omega_i t) = \text{Re}\{e^{j\omega_i t}\}$ poderemos mostrar que, de acordo com a equação (1.159), a saída será $y_i(t) = \text{Re}\{x_i(t) \cdot H(j\omega_i)\}$. Ora, se tivermos um sinal de entrada periódico e caracterizado pela sua série trigonométrica $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_i t}$, onde a_k são os coeficientes da série harmônica, então, e porque se trata de um SLIT, a saída será $y(t) = \text{Re}\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot H(jk\omega_i) e^{jk\omega_i t}\}$. No final deste capítulo, nos Problemas Resolvidos, ilustra-se precisamente esta questão; assim, veja-se o problema **P. 6**:

Logo, porquê escolher unicamente sinusoides para caracterizar o regime forçado? Pois, porque sim!

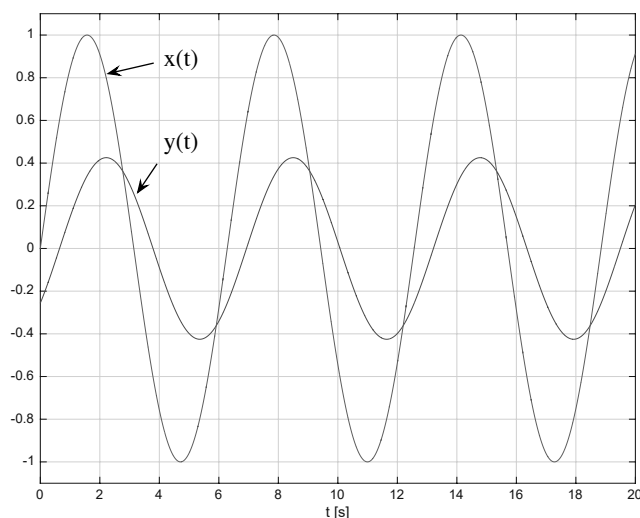


Figura 5.2. Exemplo da resposta permanente $y(t)$ do SLIT de 1ª ordem $G(s) = \frac{0,25s+0,375}{s+0,3}$ à sinusoide unitária $x(t)$ e de frequência angular $\omega = 1$ rad/s.

Veja-se a diferença entre as respostas à sinusoide da figura 5.1 (em baixo) onde se evidencia a resposta transitória e da figura 5.2 onde só existe regime permanente.

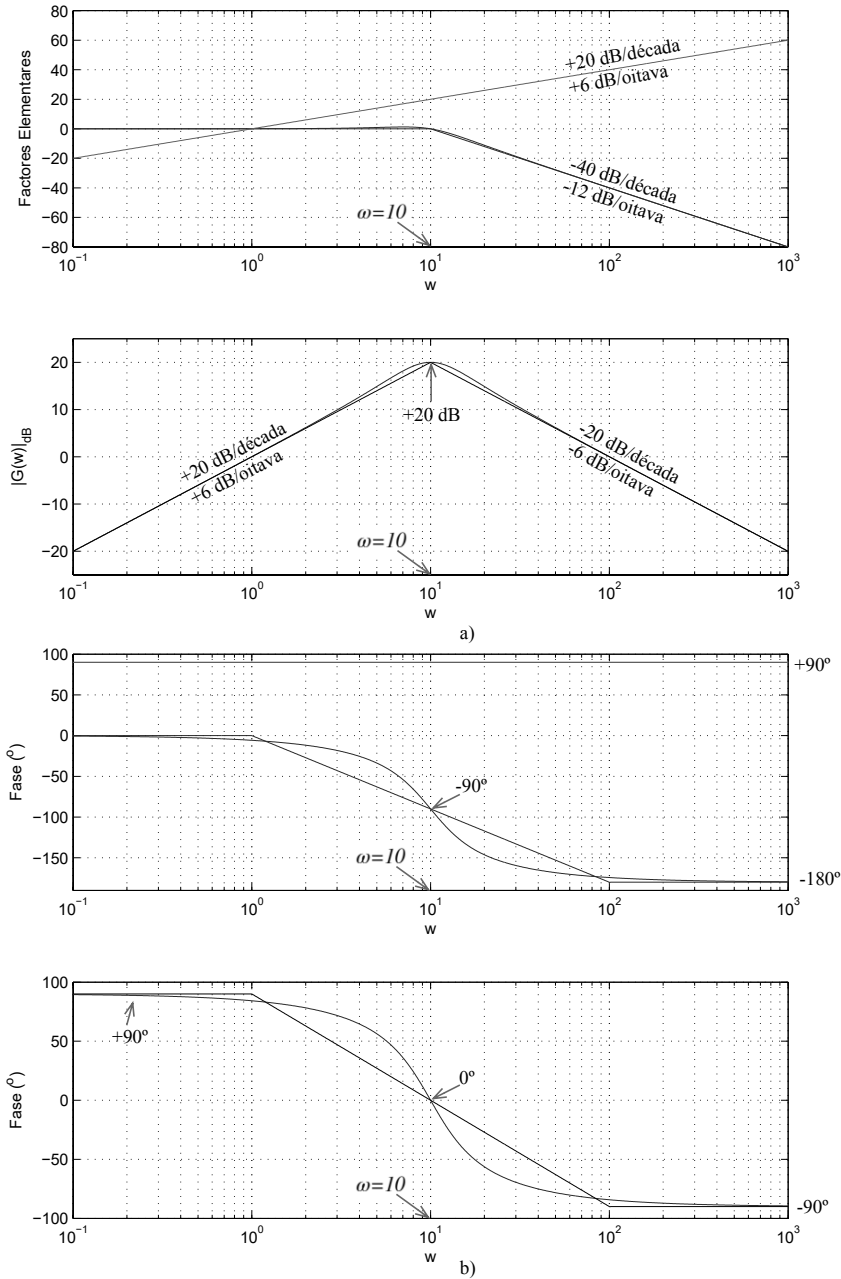


Figura 5.73. Diagramas de Bode de amplitude, em a) e de fase, em b), para o SLIT passa-baixo de 2ª ordem com pólos complexos conjugados e zero na origem: factores elementares (em cima) e global, em baixo.

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k T_0) \cdot e^{-sk T_0} \underset{e^{sT_0}=z}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k T_0) \cdot z^{-k} = \text{TZ}[x(k)] \quad (6.13)$$

Se atentarmos no significado de $x(k T_0)$ na equação acima, podemos reparar que poderemos substituir $(k T_0) \rightarrow [k]$, obtendo-se a amostra índice k do sinal $x(t)$ ³, pelo que

$$X_a(s) \Big|_{s=\frac{1}{T_0} \ln(z)} \equiv \text{TZ}[x(n)] \quad (6.14)$$

pois que resulta de se ter efectuado a mudança de variável $e^{sT_0} = z$ ou $s = \frac{1}{T_0} \ln(z)$.

Repare-se que esta transformação tem como característica o mapeamento do semi-plano complexo esquerdo no interior do círculo de raio unitário e, conseqüentemente, o eixo imaginário na circunferência de raio unitário, figura 6.5.

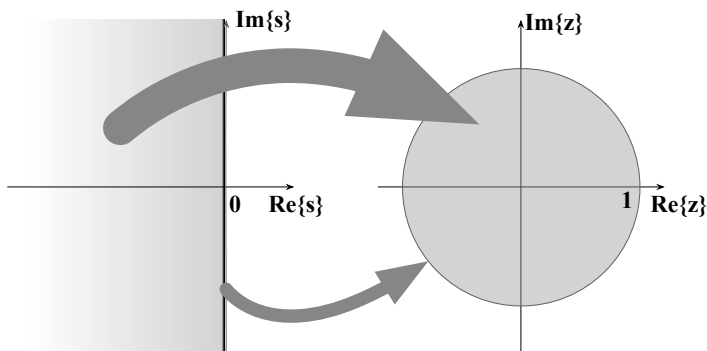


Figura 6.5. Mapeamento $s \rightarrow z$.

É interessante notar que, se os pólos de $X(s)$ tiverem parte real negativa (correspondendo, por exemplo, a um SLIT estável e causal), então o SLIT equivalente discreto também será estável (e causal).

6.2.2 AMOSTRAGEM COM RETENÇÃO DE ORDEM ZERO

Retomenos a equação que caracteriza o sinal amostrado, equação (6.6),

$$x_a(t) = [x(t) \cdot p(t)] * h_0(t) \quad (6.15)$$

³De forma equivalente, basta normalizar à unidade o período de amostragem ou seja, $T_0 = 1$.

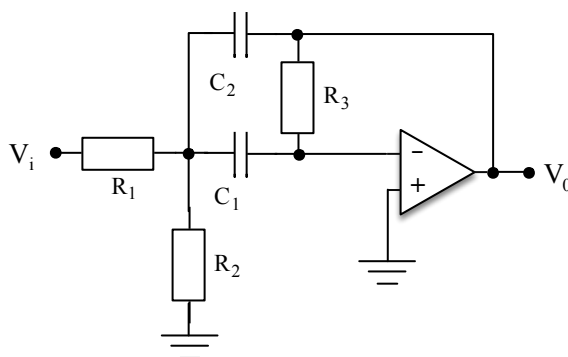


Figura 7.29. Topologia para a realização de secção bi-quadrática passa-banda utilizando uma topologia de realimentação múltipla.

qualidade Q pretendido e a frequência central $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, fazer $C_1 = C_2 = C^8$ e, seguidamente, determinar R_1 , R_2 e R_3 de acordo com

$$R_1 = \frac{Q}{H_0 \omega_0 C} \quad \therefore \quad R_2 = \frac{Q}{(2Q^2 - H_0) \omega_0 C} \quad \therefore \quad R_3 = \frac{2Q}{\omega_0 C} \quad (7.61)$$

onde H_0 é o ganho desejado na frequência central f_0 do filtro ou seja, $H_0 = |T(j2\pi f_0)|$. Os parâmetros do filtro dependem de uma forma não-linear dos valores dos componentes eléctricos, como se pode ver através das equações seguintes, equações (7.62),

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1+R_1/R_2}{R_1 R_3}} & \therefore & \quad H_0 = -\frac{R_3}{2R_1} \\ \Delta f &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{R_3 C} & \therefore & \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \end{aligned} \quad (7.62)$$

onde, naturalmente, $\omega_0 = 2\pi f_0$ e $f_0 = Q \cdot \Delta f$, sendo Δf a largura de banda do filtro.

Como exemplo, suponha-se um filtro passa-banda com as seguintes especificações: $H_0 = 1$, $f_0 = 1.000$ Hz e $Q = 2$. Assim, recorrendo às equações (7.61), obtemos $R_1 = 3,183$ k Ω , $R_2 = 455$ Ω e $R_3 = 6,366$ k Ω quando se escolhe para $C = 100$ nF. Na figura 7.30, apresentam-se os diagramas de Bode de amplitude (em cima) e de fase (em baixo) correspondentes.

Na prática, quer os condensadores quer as resistências, são fabricados com uma dada

⁸Esta decisão de escolher primeiramente os condensadores advém do facto de haver capacidades disponíveis no mercado em gamas e valores muito mais reduzidas do que as das resistências; além de que o seu custo ser muito superior, especialmente quando se pretendem tolerâncias de fabrico mais paretadas.

Produto externo ou matricial de dois vectores Designe-se o produto externo de dois vectores $\vec{u}^T = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]$ e $\vec{v} = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}]$ como sendo $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \times [v_0, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}] =$$

$$= \begin{bmatrix} u_0v_0 & u_0v_1 & u_0v_2 & \dots & u_0v_{N-1} \\ u_1v_0 & u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_{N-1} \\ u_2v_0 & u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N-1}v_0 & u_{N-1}v_1 & u_{N-1}v_2 & \dots & u_{N-1}v_{N-1} \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

Definição: Norma Euclidiana A norma euclidiana⁵ de um vector $\vec{u} = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]$ é definida como sendo

$$\|\vec{u}\| \triangleq \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2} \tag{1.51}$$

Definição: Derivada de um vector como sendo o vector das derivadas das suas componentes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}] \triangleq \left[\frac{\partial}{\partial x} u_0, \frac{\partial}{\partial x} u_1, \frac{\partial}{\partial x} u_2, \dots, \frac{\partial}{\partial x} u_{N-1} \right] \tag{1.52}$$

⁵A norma ou distância euclidiana também é conhecida por norma ou distância L^2 .

$$H_{2,5}(s) = \frac{720}{2520} \cdot \frac{60 \cdot (a \cdot s)^2 - 720 \cdot a \cdot s + 2520}{(a \cdot s)^5 + 10 \cdot (a \cdot s)^4 + 60 \cdot (a \cdot s)^3 + 240 \cdot (a \cdot s)^2 + 600 \cdot (a \cdot s) + 720} \quad (\text{IV.13})$$

$$H_{3,5}(s) = \frac{720}{6720} \cdot \frac{-20 \cdot (a \cdot s)^3 + 360 \cdot (a \cdot s)^2 - 2520 \cdot a \cdot s + 6720}{(a \cdot s)^5 + 10 \cdot (a \cdot s)^4 + 60 \cdot (a \cdot s)^3 + 240 \cdot (a \cdot s)^2 + 600 \cdot (a \cdot s) + 720} \quad (\text{IV.14})$$

$$H_{4,5}(s) = \frac{720}{15120} \cdot \frac{5 \cdot (a \cdot s)^4 - 120 \cdot (a \cdot s)^3 + 1260 \cdot (a \cdot s)^2 - 6720 \cdot a \cdot s + 15120}{(a \cdot s)^5 + 10 \cdot (a \cdot s)^4 + 60 \cdot (a \cdot s)^3 + 240 \cdot (a \cdot s)^2 + 600 \cdot (a \cdot s) + 720} \quad (\text{IV.15})$$

e cujas respostas se incluem na figura seguinte, IV.3

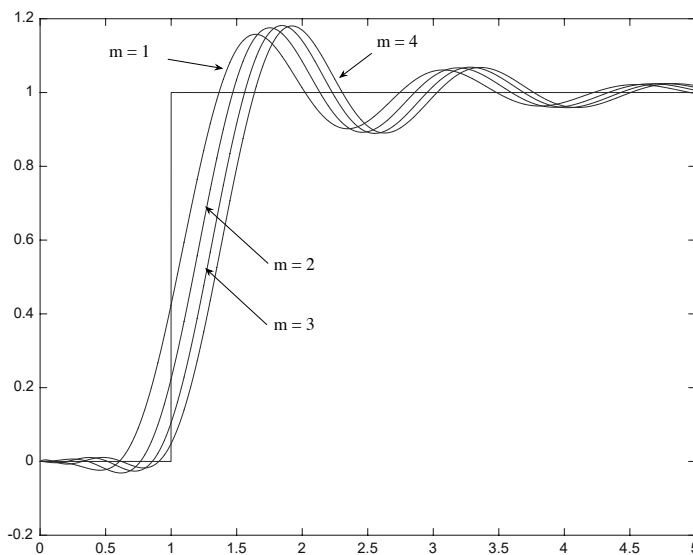


Figura IV.3. Respostas ao escalão para as aproximações de Padé de 5ª ordem com $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ e $m = 4$.

A aproximação ao regime transitório faz-se com um custo na resposta em frequência... neste caso, os diagramas de Bode afastam-se consideravelmente da resposta ideal, como se pode ver na figura IV.4.

Valores Próprios Distintos

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a matriz da dinâmica de um dado SLIT. Dado que a matriz A é triangular (triangular superior), é imediato identificar os seus valores próprios:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \lambda_2 = -1$$

correspondente a um sistema estável.

É intuitivo ver que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = \vec{0}$.

Assim, teremos $e^{\lambda_i t} = c_0 + c_1 \cdot \lambda_i$ que resulta no sistema de equações

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = c_0 + c_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ e^{-1 \cdot t} = c_0 + c_1 \cdot (-1) \end{cases}$$

Então, resolvendo este sistema obtém-se

$$\begin{cases} c_1 = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} - 2 \cdot e^{-t} \\ c_0 = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} - e^{-t} \end{cases}$$

Agora, pelo teorema de Cayley-Hamilton, $A^n = c_0 \cdot I + c_1 \cdot A$ e que se traduz em

$$e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & 2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} - e^{-t} \end{bmatrix} + \\ + [2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} - 2 \cdot e^{-t}] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Introdução à Teoria de **SINAIS E SISTEMAS**

ANTÓNIO JOAQUIM SERRALHEIRO

Sobre a obra

Apesar de haver outras fontes e títulos sobre (a teoria de) sinais e sistemas, esta obra pretende diferenciar-se pela forma de apresentação das matérias, por estar escrita em língua portuguesa, e por nela verter mais de quatro décadas de experiência lectiva, o que leva a que haja um constante cuidado com a sequenciação das matérias, bem como a forma de as apresentar de forma clara mas rigorosa.

Um *sistema* pode ser entendido como um dispositivo que, recebendo na sua entrada um sinal, produzirá outro sinal na sua saída. Já quanto a um *sinal*, poderemos caracterizá-lo como uma entidade que contém informação. E *informação* é uma qualidade que nos permite obter conhecimento sobre certo fenómeno. Para quantificarmos de alguma forma estes conceitos recorreremos à mais poderosa ferramenta disponível nas engenharias: a Matemática. Em consequência, teremos de fazer corresponder os conceitos anteriores (informação, sinal, sistema) a variáveis, a operadores, a funções matemáticas. E é de tudo isto que se trata nesta obra.

Inicialmente, teremos de definir cuidadosamente o que se entende por sinal, que características lhes atribuiremos, como poderemos mudar ou alterar essas características, e de que ferramentas dispomos para estes desideratos. Seguidamente, e já conhecendo um pouco melhor o que é um sinal, prosseguiremos para o estudo dos sistemas, caracterizando-os e analisando-os. Dada a complexidade dos conceitos envolvidos, somos forçados a delimitar fortemente o âmbito do estudo e, dado que se trata de uma obra de carácter introdutório, apenas iremos tratar de sinais univariáveis, determinísticos e de sistemas lineares e invariantes.

Sobre o autor

António Joaquim Serralheiro

Nasceu em Lisboa, em 1956. Licenciou-se em Engenharia Electrotécnica, ramo de Telecomunicações e Electrónica, no Instituto Superior Técnico (IST), em 1978. Neste Instituto concluiu ainda o Mestrado (1984) e o Doutoramento em Engenharia Electrotécnica e Computadores (1990).

Docente do IST a partir de 1977, permaneceu como Professor Auxiliar no Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores até 2002, altura em que transitou para a Academia Militar (AM), como Professor Associado do Departamento de Ciências e Tecnologias da Engenharia (DCTE).

Desenvolve Investigação e Desenvolvimento (I&D) desde 1980 no INESC ID, tendo participado em diversos projectos internacionais e nacionais. Foi membro do CINAMIL – Centro de Investigação da Academia Militar, de 2004 até 2022, onde foi o presidente do seu Conselho Directivo (de 2014 a 2017). Tem trabalhado como consultor do 7º Programa-Quadro e do Horizonte 2020 da Comunidade Europeia desde 2012. Tem várias dezenas de artigos científicos publicados e participa como revisor científico em revistas e conferências internacionais.

Passou à situação de aposentado em 2022, ano em que lhe foi atribuído o título de Professor Emérito da Academia Militar. Tem ainda duas condecorações do Exército Português.

Também disponível em formato papel



www.engebook.pt

