

LUÍSA MADUREIRA

# Problemas de Análise Matemática para Engenharia

Cálculo do Trabalho, Fluxo,  
Séries de Fourier e Aplicação  
à Equação das Ondas

$$\int_C f \cdot da \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}$$
$$\iiint \operatorname{div} F(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

AUTORA

**Luísa Madureira**

TÍTULO

**Problemas de Análise Matemática para Engenharia**

**– Cálculo do Trabalho, Fluxo, Séries de Fourier e Aplicação à Equação das Ondas**

EDIÇÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt

CHANCELA

Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO

Booki – Conteúdos Especializados

Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN

Delineatura – Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO

Novembro, 2022

DEPÓSITO LEGAL

506776/22



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.

Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2022 | Todos os direitos reservados a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, é ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU

51 Matemática

517 Análise Matemática

517.9 Equações diferenciais. Equações integrais. Outras equações funcionais.  
Diferenças finitas. Cálculo de variações. Análise funcional

ISBN

Papel: 9789899101562

Ebook: 9789899101579

Catálogo da publicação

Família: Bases de Engenharia

Subfamília: Matemática

# ÍNDICE

---

PREFÁCIO .....	VII
----------------	-----

## CAPÍTULO 1

<b>INTEGRAL DE LINHA.....</b>	<b>9</b>
1.1. Definição do integral de linha.....	9
1.2. Propriedades do integral de linha .....	13
1.3. Teoremas fundamentais do cálculo para integrais de linha.....	17
1.4. Teorema de Green.....	22
1.5. Integral de linha relativamente ao comprimento de arco.....	25

## CAPÍTULO 2

<b>INTEGRAL DE SUPERFÍCIE .....</b>	<b>37</b>
2.1. Produto vetorial fundamental e área de uma superfície.....	39
2.2. Aplicações do integral de superfície à geometria de massas.....	42
2.3. Fluxo através de uma superfície.....	46
2.4. Teorema de Gauss e Teorema de Stokes .....	48

CAPÍTULO 3

**SÉRIES DE FOURIER ..... 73**

**3.1. Convergência da série de Fourier.....77**

**3.2. Fórmulas de Euler.....77**

**3.3. Séries de Fourier de funções pares ou ímpares.....81**

**3.4. Forma alternativa da série de Fourier.....88**

**3.5. Polinómio trigonométrico e erro quadrático .....90**

**3.6. Equações de derivadas parciais pelo método de separação de variáveis  
e séries de Fourier..... 93**

    3.6.1. Equação da corda vibrante ..... 93

    3.6.2. Integração da equação da corda vibrante pelo método de separação  
        de variáveis..... 96

BIBLIOGRAFIA ..... CXI

ÍNDICE REMISSIVO .....CXIII

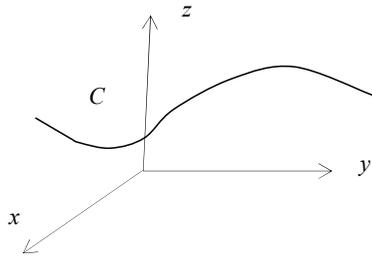
# CAPÍTULO 1

---

## INTEGRAL DE LINHA

---

A noção de integral de linha diz respeito à integração de uma função, vetorial ou escalar, em que o domínio de integração é uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^3$ .



**Figura 1.1.** Curva em  $\mathbb{R}^3$ .

---

### 1.1. Definição do integral de linha

O integral é geralmente apresentado com a notação

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \tag{1.1}$$

quando a função é vetorial. O seu significado e como se calcula é discutido seguidamente.

Ou seja, o integral de linha entre dois pontos de um campo conservativo ou gradiente só depende do ponto final e inicial, mas apenas desde que o domínio seja simplesmente conexo (significa que qualquer curva simples fechada se pode encolher por um processo contínuo até se reduzir a um ponto, mantendo-se sempre dentro do domínio).

Para isso é preciso dado um campo conservativo, ou gradiente, encontrar a família de funções escalares  $\varphi$  que têm esse gradiente.

$$\text{Seja } \mathbf{f} = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Terá de ser

$\varphi =$

$$\int_c^x \frac{\partial\varphi}{\partial u} du = \int_c^x f_1(u, y, z) du + A(y, z)$$

em que  $A(y, z)$  é a “constante” de integração que pode ter funções de  $y$  e de  $z$ .

Analogamente para as outras derivadas parciais de  $\varphi$  pode-se integrar a derivada parcial em ordem a  $y$  considerando  $x$  e  $z$  como constantes ou integrar a derivada parcial em ordem a  $z$  considerando  $x$  e  $y$  como constantes. Comparando os resultados obtém-se a função  $\varphi$ , como se ilustra no exemplo seguinte.

## Exemplo 1.6.

Mostre que  $\mathbf{f}(x, y, z) = (1 + y - z, x - 1, 2z - x)$  é gradiente e determine a sua função potencial.

### Resolução

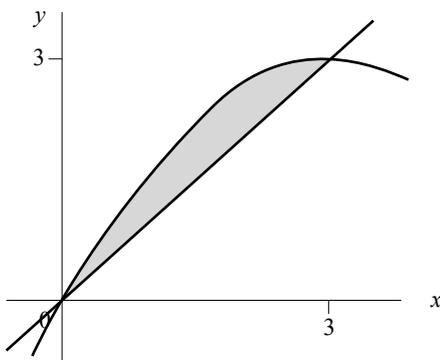
Seja  $f_1(x, y, z) = 1 + y - z$ ,  $f_2(x, y, z) = x - 1$  e  $f_3(x, y, z) = 2z - x$ . Primeiro calculam-se os pares de derivadas cruzadas

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

## Resolução

As duas curvas intersectam-se no ponto (3,3) e sendo  $P(x,y) = 3 + y$ ,  $Q(x,y) = 2x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 1 = 1$$



**Figura 1.7.** Representação da curva  $C$  e região no seu interior.

Então pelo teorema tem-se

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} 1 dydx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \frac{9}{2}$$

Calculando agora os dois integrais de linha, sejam as parametrizações

$\alpha_1(t) = (t, t)$ ,  $t \in [0,3]$ , (representa o segmento de reta) e está no sentido direto

$\alpha_2(t) = (t, 4t - t^2)$ ,  $t \in [0,3]$ , (representa o segmento de parábola) sendo esta curva percorrida em sentido retrógrado uma vez que  $t$  está crescente, pelo que o integral neste caso, vai ter sinal contrário.

O integral é então dado pela soma dos dois integrais de linha

$$\begin{aligned} & \int_0^3 f(\alpha_1(t)) \cdot \alpha_1'(t) dt - \int_0^3 f(\alpha_2(t)) \cdot \alpha_2'(t) dt = \\ &= \int_0^3 (3 + t, 2t) \cdot (1, 1) dt - \int_0^3 (3 + 4t - t^2, 2t) \cdot (1, 4 - 2t) dt = \\ &= \int_0^3 (3 + 3t - 3 - 4t + t^2 - 8t + 4t^2) dt = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

# CAPÍTULO 2

---

## INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

---

Considere-se uma superfície  $S$  como uma fronteira a duas dimensões de um sólido ou objeto. No caso de uma fronteira completa de um sólido a superfície é fechada. A superfície pode ser fechada, aberta, definida de modo único, como no caso de uma superfície esférica, por exemplo, ou definida pelas seis faces planas de um cubo no caso de mais do que uma superfície. A superfície é aberta por exemplo no caso da fronteira lateral de um cone, sem incluir a base. Uma superfície  $S$  é considerada sem espessura, podendo determinar-se o valor da sua área. Genericamente é considerada o lugar geométrico do espaço com dois graus de liberdade, Fig. 2.1.

Uma representação de uma superfície pode ser explícita ou implícita. Por exemplo uma superfície cônica, representada pela equação  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , está definida explicitamente. Uma representação implícita de uma superfície é por sua vez do tipo

$$F(x, y, z) = C \tag{2.1}$$

e poderia ser, no caso do cone mencionado,  $x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0$ .

### Representação paramétrica

A parametrização de uma superfície, que é a representação dos seus pontos  $(x, y, z)$  à custa de dois parâmetros, Fig. 2.1, é dada pela função vetorial

## Interpretação da derivada

A derivada  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  é o vetor velocidade para uma curva na superfície  $S$  com  $v=\text{constante}$ .

Analogamente  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  é o vetor velocidade ao longo de uma curva na superfície  $S$ , com  $u=\text{constante}$ .

A distância percorrida ao longo dessas curvas é, em cada caso, respetivamente dada por

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \text{ e } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$$

Então um retângulo de lados  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  é aplicado por  $\mathbf{r}$  num paralelogramo curvilíneo sobre a superfície  $S$ , Fig. 2.2., com área aproximada dada pelo produto vetorial

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

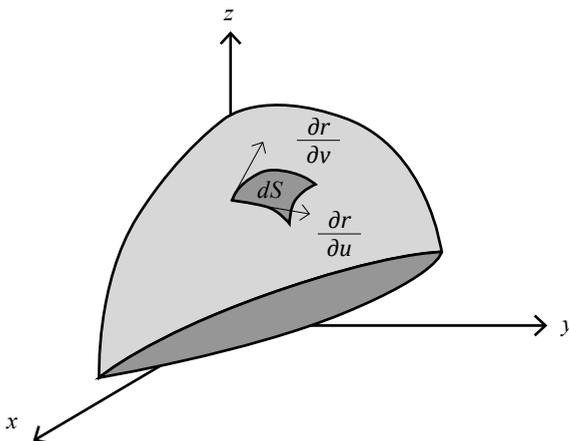
A partir desta área elementar é definida a diferencial  $dS$  como

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

### Definição:

produto vetorial fundamental é  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  e é normal à superfície em cada ponto

A partir da diferencial  $dS$ , integrando sobre toda a superfície  $S$ , obtém-se o valor da sua área.



**Figura 2.2.** Paralelogramo curvilíneo, área elementar  $dS$ .

### Definição: fluxo

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, dudv$$

Para definir completamente a orientação do fluxo, fica só por definir se o produto vetorial fundamental é um vector normal interior ou normal exterior à superfície, o que será estudado caso a caso.

Simplificando a expressão obtém-se, para o fluxo, o integral em  $S$

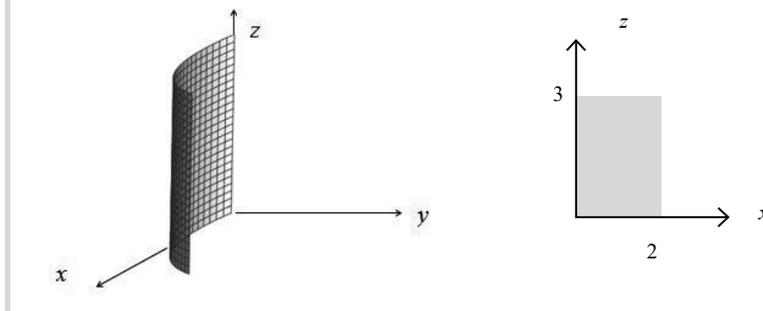
### Definição: fluxo

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \, dudv \quad (2.6)$$

### Exemplo 2.5.

Calcular o fluxo de  $\mathbf{v}(x, y, z) = (z^2, 2, 2xz)$  para fora do cilindro parabólico  $y = x^2$ , com  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 3$ , em que a densidade é constante igual a 3.

#### Resolução



## Exemplo 2.6. Gradiente de uma função escalar, $\text{grad}f(x, y, z)$

Calcular  $\nabla f(x, y, z)$ , sendo  $f(x, y, z) = x^2 - yz + 1$

### Resolução

$$\text{grad}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$

E pode escrever-se na forma de um “produto”

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Neste caso com a função dada obtém-se

$$\begin{aligned} \text{grad}f &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - yz + 1), \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - yz + 1), \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - yz + 1) \right) = \\ &= (2x, -z, -y) \end{aligned}$$

## Exemplo 2.7. Divergência de um campo vetorial,

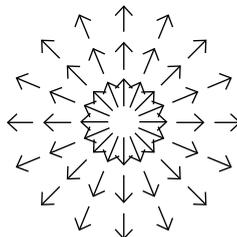
$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$$

O operador Nabla pode também aplicar-se a funções vetoriais. Neste caso pretende-se calcular a divergência de um campo de vetores. A divergência representa a tendência de o fluido divergir a partir de um ponto.

Calcular  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$ , sendo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$

### Resolução

Esboçando alguns vetores do campo, graficamente, os vetores são da forma



A parametrização da curva é dada por  $\alpha(x) = (x, f(x))$ ,  $0 \leq a \leq x \leq b$

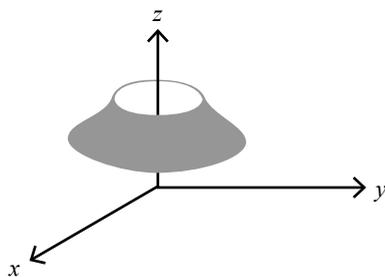
A coordenada do centróide  $x_c$  da curva em rotação é dado por

$$x_c = \frac{\int_a^b x \|\alpha'(x)\| dx}{L}$$

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx}{L}$$

A superfície resultante da rotação em torno do eixo dos  $zz$  desta curva tem parametrização

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)), \quad 0 \leq a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$



**Figura 2.4.** Superfície de revolução.

O produto vetorial fundamental é dado por

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = u \sqrt{[f'(u)]^2 + 1}$$

E a área da superfície é dada por

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b u \sqrt{[f'(u)]^2 + 1} du dv$$

$$= 2\pi \int_a^b u \sqrt{[f'(u)]^2 + 1} du = 2\pi L x_c$$

# CAPÍTULO 3

---

## SÉRIES DE FOURIER

---

Uma série de Fourier é uma soma infinita de funções trigonométricas, senos e co-senos, que representa uma função periódica. Como exemplo de uma série trigonométrica considere-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

Verifica-se que é uma série com senos e co-senos e se a soma existir, isto é, se a série convergir, é uma função periódica de período  $2\pi$ .

O objetivo deste capítulo é representar funções periódicas por combinações das funções seno e co-seno e obter séries trigonométricas designadas séries de Fourier. As séries de Fourier representam um leque muito vasto de funções, mesmo descontínuas, podendo ter vários pontos de descontinuidade e a sua aplicação é feita em vários domínios da engenharia como problemas de vibrações ou teoria do sinal, as equações diferenciais, incluindo até as de derivadas parciais por exemplo em problemas de condução do calor.

### 3.1. Convergência da série de Fourier

Determine-se então agora qual a série de Fourier que representa uma função periódica de período  $2\pi$ . Basta para isso determinar os coeficientes  $a_0, a_n, b_n$ .

#### Teorema:

Se uma função  $f(x)$  é periódica, limitada, e satisfaz condições de Dirichlet num intervalo de amplitude um período, então a sua série de Fourier converge para  $f(x)$  nos pontos de continuidade e é igual à média dos limites laterais de  $f(x)$  nos pontos de descontinuidade.

### 3.2. Fórmulas de Euler

Uma maneira de determinar os coeficientes é pelas fórmulas de Euler, que é descrito seguidamente no caso de período  $2\pi$ . Existe um outro método que não envolve primitivação designado método dos saltos e que não será abordado nesta obra.

#### Fórmulas de Euler para funções de período $2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Seja a série de Fourier para  $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (3.2)$$

Tem-se

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

Analogamente para calcular  $a_n$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-2\pi}^0 -x \cos\left(\frac{n\pi x}{2\pi}\right) dx + \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{2\pi}\right) dx \right) =$$

Como a função a integrar é uma função par, e os limites de integração simétricos, conclui-se que o resultado de cada um dos integrais é o mesmo e por isso calcula-se apenas um deles e multiplica-se por 2.

$$\begin{aligned} &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{n} x \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{2}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{4}{n^2} (\cos(n\pi) - 1) \end{aligned}$$

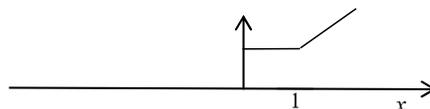
A série de co-senos é então

$$F(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4}{n^2} (\cos(n\pi) - 1) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

### Exemplo 3.5.

Calcular a expansão em série de senos de  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ x & 1 < x < 2 \end{cases}$ .

#### Resolução



**Figura 3.4.** Representação de  $f(x)$ .

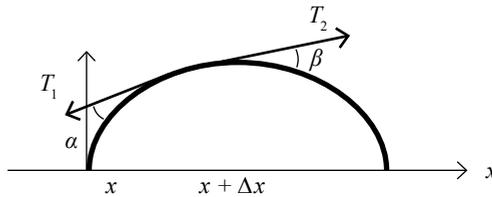
A corda tem um comprimento  $L$  dado e está fixa nas duas extremidades, para  $x = 0$  e  $x = L$ , como se ilustra na Fig 3.9. Então a posição da corda dada por  $y(x,t)$  é nestes pontos, sempre zero. A posição inicial é dada por uma função  $y_0(x)$  e imprime-se, ou não, uma velocidade inicial  $g(x)$  a cada ponto.

São estas as quatro condições fronteira/iniciais a considerar neste problema:

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= y_0(x) \\ y(0, t) &= 0 \\ y(L, t) &= 0 \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Na Fig 3.11. pode ver-se como as forças atuam numa pequena porção da corda. Para isso escolhem-se pontos  $x$  e  $x + \Delta x$ .

A tensão na corda é tangencial à curva em cada ponto, seja  $T_1$  no ponto  $x$  e  $T_2$  no ponto  $x + \Delta x$ .



**Figura 3.11.** Tensão na corda.

Como a corda só se move verticalmente não há movimento na direção horizontal, e portanto, as componentes horizontais são constantes e iguais, seja iguais a  $T$ .

$$T = T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta \tag{3.9}$$

A força resultante é então dada pela componente vertical da tensão na corda que é dada por

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha$$

Calculando agora os coeficientes  $A_n$

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^\pi (\pi x - x^2) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\pi} \right) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{n} \cos(nx) (\pi x - x^2) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n} (\pi - 2x) \cos(nx) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( 0 + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) (\pi - 2x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n^2} (-2) \operatorname{sen}(nx) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( 0 + 0 + \frac{1}{n^3} \cos(nx) (-2) \Big|_0^\pi \right) = -\frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1)
 \end{aligned}$$

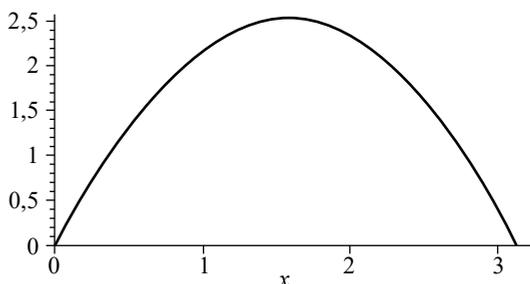
Finalmente

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \operatorname{sen}(nx) \cos(nt)$$

A solução é a sobreposição de funções, de cada modo de vibração ou movimento harmónico, sendo que para  $n = 1$  se designa modo fundamental.

Sem estar rigorosamente representado à escala, apresentam-se a seguir os primeiros modos de vibração. Note-se que os termos de ordem par, neste caso, são nulos.

Para  $t$  fixo, o modo fundamental, para  $n = 1$  é dado por



LUÍSA MADUREIRA

# Problemas de Análise Matemática para Engenharia

Cálculo do Trabalho, Fluxo,  
Séries de Fourier e Aplicação  
à Equação das Ondas

## Sobre a obra

A integração a três dimensões sobre linhas ou superfícies tem vasta aplicação no domínio da Engenharia, como o cálculo do trabalho realizado por um campo de forças, de um fluxo através de uma superfície ou de um centroide. Também o desenvolvimento de funções periódicas em séries de Fourier tem aplicações a problemas de vibração ou propagação, ou outros em que as funções periódicas são aproximadas, com erro controlado, por poucos termos da série de Fourier. Elaborado a partir do trabalho de lecionação e atendendo às unidades curriculares com formação base de Matemática, este livro propõe uma série de exercícios resolvidos e propostos para as várias aplicações a Engenharia.

## Sobre a autora

**Luísa Madureira**, natural do Porto, concluiu a licenciatura em Matemática Aplicada em 1984 pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Pertence ao corpo Docente da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, sendo Professora Auxiliar do departamento de Engenharia Mecânica, onde leciona unidades curriculares de Análise Matemática a vários Mestrados Integrados, que atualmente transitaram para Licenciaturas. É Doutorada em Engenharia Mecânica pela FEUP, tendo concluído a tese em 1996. Tem vários artigos científicos publicados sobre métodos numéricos na área de Engenharia Mecânica.

Também disponível em formato e-book



[www.engebook.pt](http://www.engebook.pt)