CÁLCULO I

Conceitos, Exercícios e Aplicações

Ana C. Meira Castro | Ana Júlia Viamonte | António Varejão Sousa

2.ª Edição

engebook

AUTORES
Ana C. Meira Castro
Ana Júlia Viamonte
António Varejão Sousa

TÍTULO
Cálculo I – Conceitos, Exercícios e Aplicações – 2.ª Edição

EDIÇÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt

CHANCELA
Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO
Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN DE CAPA
Delineatura – Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO
Outubro, 2022

DEPÓSITO LEGAL
505418/22

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU
51 Matemática
517 Análise Matemática

ISBN
Papel: 9789899101463
E-book: 9789899101470

Catalogação da publicação
Família: Bases de Engenharia
Subfamília: Matemática

Este livro protege o ambiente

Na produção deste livro foi utilizado papel proveniente de florestas de gestão sustentável.
A dimensão das folhas foi otimizada para evitar desperdícios de corte.
Na impressão foram utilizadas tintas de baixo teor de solvente.

Índice

Exemplo 1. Se $A = \{a,\ b,\ c\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3\}$, é possível obter uma aplicação escrevendo o conjunto $\{(a, 1),\ (b, 1),\ (c, 3)\}$.

Contudo, já não é aplicação o conjunto $\{(a, 1),\ (a, 3),\ (b, 2),\ (c, 3)\}$, visto o elemento a de A figurar, simultaneamente, em dois pares distintos.

Também não é uma aplicação o conjunto $\{(a, 1),\ (b, 2)\}$, visto o elemento c de A não figurar em par algum.

Mas, o mais usual, é recorrer a uma tabela, a um gráfico cartesiano, à expressão designatória ou a um diagrama sagital.

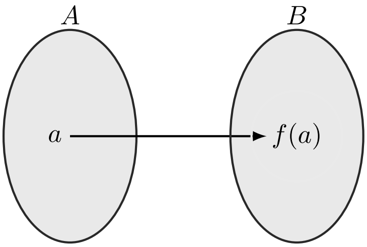


Figura 1.1.: Aplicação de A em B.

Exemplo 2. A aplicação $f : A \to B$, com $A = \{a,\ b,\ c\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ considerada acima, ou seja, o conjunto $\{(a, 1),\ (b, 1),\ (c, 3)\}$ pode definir-se mais abreviada e talvez mais sugestivamente, colocando $f(a) = 1$; $f(b) = 1$; $f(c) = 3$, ou através do diagrama

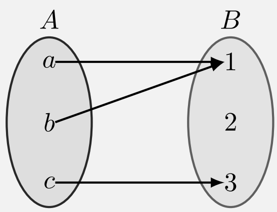


Figura 1.2.: Diagrama sagital que representa a aplicação f de A em B.

Definição 2. Função real de variável real

Seja f uma função de A *em* B. *D*iz-se que f é uma *função real de variável real,* (*frvr*), se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$.

Observação 1. Através de um gráfico, pode-se verificar se este é um gráfico de uma função fazendo o TESTE DA RETA VERTICAL que consiste em traçar uma reta

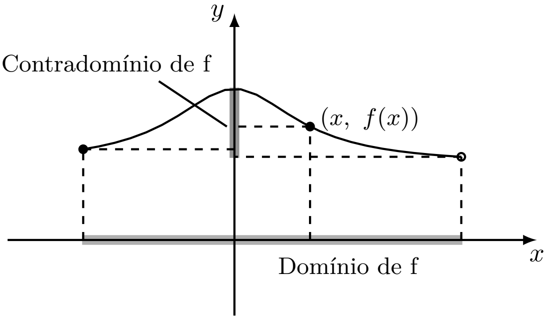


Figura 1.4.: Gráfico, domínio e contradomínio de *f*.

Exemplo 3. Sendo $A = \{-2,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $B = \{-4,\ -2,\ -1,\ 0,\ 4,\ 8\}$ e $f : A \to B$, a função definida por $f(x) = x^2 - 2x$, tem-se:

- $f(-2) = (-2)^2 - 2\,(-2) = 4 + 4 = 8$
- $f(0) = (0)^2 - 2\,(0) = 0$
- $f(1) = (1)^2 - 2\,(1) = 1 - 2 = -1$
- $f(2) = (2)^2 - 2\,(2) = 4 - 4 = 0$

Assim, a aplicação $f : A \to B$, pode definir-se mais abreviada e talvez mais sugestivamente através de um diagrama por

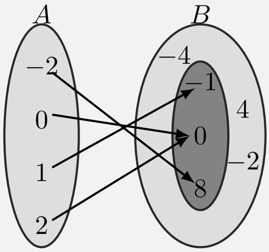


Figura 1.5.: Diagrama que representa a aplicação f de A em B.

O domínio de f é o conjunto $D_f = A = \{-2,\ 0,\ 1,\ 2\}$
O conjunto de chegada de f é o conjunto $B = \{-4,\ -2,\ -1,\ 0,\ 4,\ 8\}$
O contradomínio de f é o conjunto $CD_f = \{-1,\ 0,\ 8\}$

Observação 2. Relativamente ao domínio de uma *frvr*, é necessário ter em atenção as seguintes situações:

- Se f é uma função polinomial, f tem domínio $\mathbb{R}$.
- Se f é uma função racional, o domínio de f é constituído pelos números reais que não anulam o denominador.

Exemplo 5. Considere-se a *frvr* definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$.

Como só estão definidas raízes quadradas de números reais positivos e quocientes em que o denominador não é nulo, o domínio desta função é dado por

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x - 2 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 2\right\} \end{aligned}$$

A simplificação deste conjunto implica determinar os valores de x para os quais se tem $x^2 - 1 \geq 0$,

Tabela 1.2.: Sinal de $x^2 - 1$.

x	-∞		-1		1		+∞
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

Logo, $x^2 - 1 \geq 0$ se, e só se,$x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1$.
Juntando, agora, as duas condições, tem-se

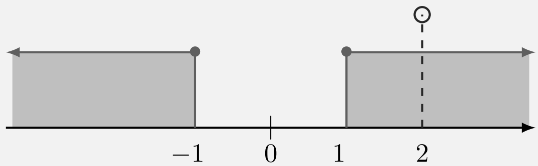


Figura 1.11.: Domínio de f.

ou seja, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 2 \ \wedge (x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1)\} =]-\infty, -1] \cup [1, 2[\cup]2, +\infty[$.

Funções polinomiais de grau igual ou inferior a dois

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma *frvr.*

- Se f é uma **função constante**, $\forall x \in D_f, \ f(x) = b, \quad (b \in \mathbb{R})$, então o gráfico de f é a reta horizontal $y = b$.

Estas relações podem, então, ser representadas no círculo trigonométrico da seguinte forma

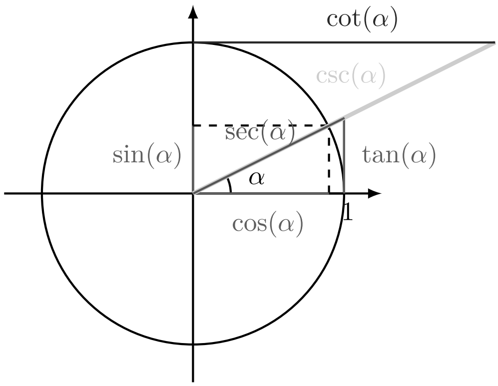


Figura 1.25.: Círculo trigonométrico.

As seis funções trigonométricas podem ser definidas em termos do ângulo associado a um número real. Assim, considere-se um ponto genérico do círculo trigonométrico, cujas coordenadas são $P(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, em que α é o ângulo em radianos que o segmento de reta $[OP]$ forma com o eixo das abcissas. Fazendo variar continuamente P ao longo do círculo trigonométrico, associa-se a cada ângulo α, o valor da ordenada de P, formando-se o ponto do plano cartesiano; desta forma obtém-se o gráfico da função seno. O conceito ilustra-se na figura seguinte, onde se marcam alguns pontos do círculo e os seus correspondestes no gráfico.

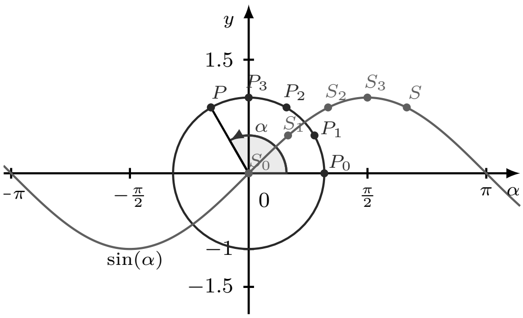


Figura 1.26.: Associação da função seno ao ponto girante P do círculo trigonométrico.

Para as restantes funções trigonométricas, o processo é similar ao apresentado para a função seno, bastando trocar-se a ordenada de S pela medida associada à função em estudo e ilustrada no círculo trigonométrico da figura 1.25.

Os gráficos das funções seno, cosseno, tangente e cotangente estão representados no anexo 3.8, bem como algumas propriedades destas funções. Nesta secção apenas se fez uma breve introdução a estas funções que servem de suporte às funções tigonométricas inversas, a apresentar na secção seguinte.

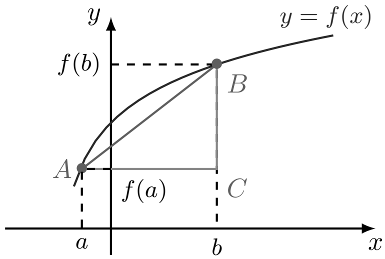


Figura 1.43.: Taxa de variação média.

Quando o ponto $(b, f(b))$ se aproxima do ponto $(a, f(a))$, a reta que passa pelos dois pontos aproxima-se da reta tangente à curva representativa da função no ponto $(a, f(a))$. Fazendo $b = a + h$, e sendo h um infinitésimo, então a taxa de variação média de f entre a e $b = a+h$ aproxima-se da taxa instantânea em a. A reta tangente tem de equação

$$y = f(a) + \underbrace{\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{m} (x - a) \tag{1.27}$$

O declive da reta tangente está na origem de um novo conceito matemático, a derivada.

Definição 33. Derivada de uma função num ponto

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior a D. Chama-se *taxa de variação instantânea, velocidade* ou *derivada de f em a*, e representa-se por $f'(a)$ ou $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ ao limite, se existir

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.28}$$

ou, fazendo $x - a = h$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1.29}$$

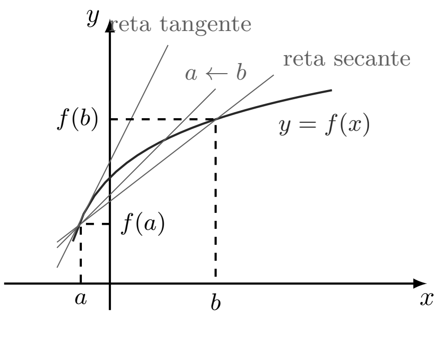


Figura 1.44.: Derivada de f no ponto de abcissa a.

2.3. Séries numéricas

Uma aplicação importante das sucessões consiste em representar "somas infinitas". Considere-se, por exemplo, a sucessão dos quadrados encostados representados na figura 2.9, em que os seus lados estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

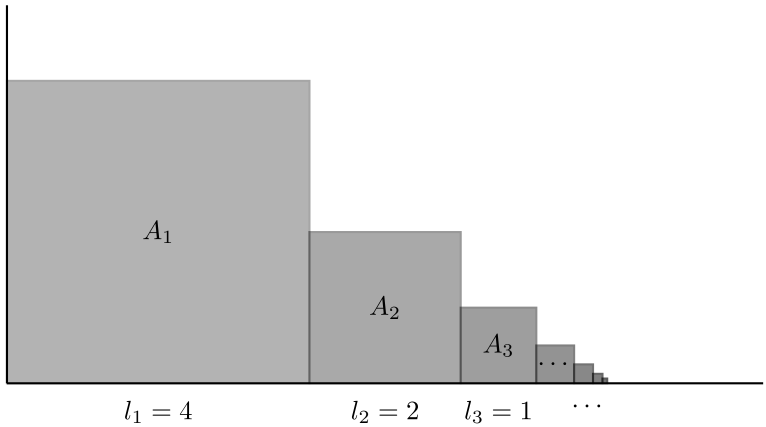


Figura 2.9.: Sucessão de quadrados encostados.

Várias questões se podem colocar como, por exemplo:

- qual o espaço horizontal ocupado por todos os quadrados?
- qual a área de todos os quadrados?

A resposta a estas questões já começou a ser introduzida na secção 2.2.5, aquando do estudo das progressões geométricas, mas aqui é-se questionado sobre um conceito novo: a soma de todos os termos de uma sequência infinita. Nesta secção, este conceito vai ser estudado de uma forma abrangente, introduzindo-se uma nova entidade matemática: as séries numéricas. O estudo das séries numéricas é uma extensão ao estudo das sucessões e será a ferramenta de suporte para o estudo das séries de funções.

Definição 60. Sucessão de somas parciais

Seja $\{u_n\}$, uma sucessão numérica. Chama-se sucessão de somas parciais de $\{u_n\}$ à sucessão $\{S_n\}$ cujo termo geral é a soma dos n primeiros termos da sucessão.

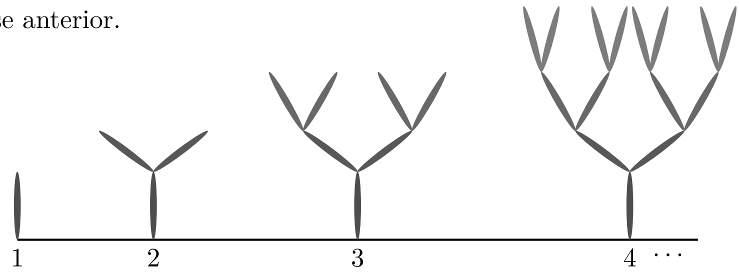
$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 \\
&S_2 = u_1 + u_2 \\
&\cdots \\
&S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, n \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A soma dos n primeiros termos de uma sucessão $\{u_n\}$ representa-se pelo operador somatório de termo geral u_i, em que o índice i varia de 1 a n e indica-se tal como se segue

5. Considerem-se dois modelos de crescimento do número de ramos de uma planta que inicia com um ramo.

Modelo 1 em cada nova fase de crescimento são acrescentados 2 novos ramos à planta;

Modelo 2 em cada nova fase são acrescentados 2 novos ramos a cada ramo da fase anterior.



a) No modelo 1, considere a sequência do número total de ramos da planta;
   i. indique os 5 primeiros termos;
   ii. mostre que se trata de uma progressão aritmética;
   iii. determine a ordem a partir da qual a planta ultrapassa os 1000 ramos.

b) No modelo 2, considere a sequência de novos ramos em cada fase;
   i. determine os 5 primeiros termos;
   ii. mostre que se trata de uma progressão geométrica;
   iii. determine a sequência para o número total de ramos da planta e a ordem a partir da qual ultrapassa os 1000 ramos.

6. As espirais da figura 2.18 são construídas a partir de triângulos retângulos isósceles, cujo elemento inicial tem catetos de lado unitário. Na construção levogira (a) o cateto de um dado elemento é a hipotenusa do elemento anterior e na construção dextrogira (b) a hipotenusa de um dado elemento é o cateto do elemento anterior.

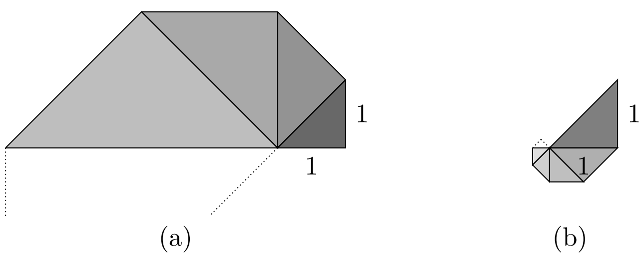
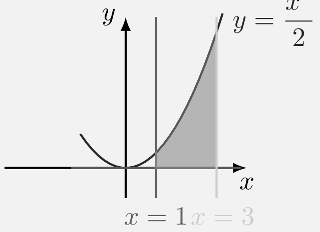


Figura 2.18.: Espirais de triângulos isósceles: (a) levogira; (b) dextrogira.

Exemplo 115.

Cálculo da área da região limitada pelas curvas $y = \dfrac{x^2}{2}$ e as retas $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$.



$$A = \int_1^3 \frac{x^2}{2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{1}{6}(27-1)\right]$$
$$= \frac{26}{6} = \frac{13}{3}\ u.a.$$

3.4.5. Cálculo de áreas de regiões planas

Considere-se a área da região plana limitada pelas funções $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. O integral segundo o eixo das abcissas que permite calcular o valor da área é

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \tag{3.23}$$

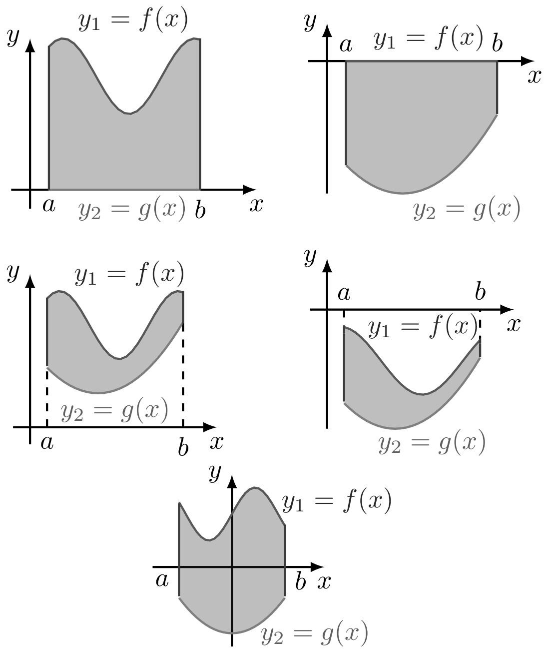


Figura 3.4.: Exemplos de regiões projetadas sobre o eixo das abcissas.

Analogamente, se se considerar a área da região plana limitada pelas funções

$$\begin{aligned}
\text{d)}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\ dx &= \int \frac{\sin^2 x\ \sin x}{\cos^5 x}\ dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^5 x}\sin x\ dx \\
&= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^5 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^5 x}\sin x\right)\ dx \\
&= -\int -\sin x\ \cos^{-5} x\ \ dx + \int -\sin x\ \cos^{-3} x\ dx \\
&= -\frac{\cos^{-4} x}{-4} + \frac{\cos^{-2} x}{-2} + C = \frac{1}{4}\sec^4 x - \frac{1}{2}\sec^2 x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)}\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\ dx &= \int \frac{\cos^4 x\ \cos x}{\sin^2 x}\ dx = \int \frac{\left(\cos^2 x\right)^2}{\sin^2 x}\cos x\ dx \\
&= \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^2 x}\cos x\ dx = \int \frac{1+\sin^4 x + 2\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos x\ dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x}\cos x\ dx + \int \frac{\sin^4 x}{\sin^2 x}\cos x\ dx + \int \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos x\ dx \\
&= \int \sin^{-2} x\ \cos x\ dx + \int \sin^2 x\ \cos x\ dx + 2\int \cos x\ dx \\
&= \frac{\sin^{-1} x}{-1} + \frac{\sin^3 x}{3} + 2\sin x + C = -\csc x + \frac{\sin^3 x}{3} + 2\sin x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f)}\int \tan^3\left(\frac{x}{3}\right)\ dx &= \int \tan^2\left(\frac{x}{3}\right)\tan\left(\frac{x}{3}\right)\ dx = \int \left(\sec^2\left(\frac{x}{3}\right)-1\right)\tan\left(\frac{x}{3}\right)\ dx \\
&= \int \left[\sec^2\left(\frac{x}{3}\right)\tan\left(\frac{x}{3}\right) - \tan\left(\frac{x}{3}\right)\right]\ dx \\
&= 3\int \frac{1}{3}\sec^2\left(\frac{x}{3}\right)\tan\left(\frac{x}{3}\right)\ dx + 3\int \frac{-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}\ dx \\
&= 3\frac{\tan^2\left(\frac{x}{3}\right)}{2} + 3\ln\left|\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right| + C = \frac{3}{2}\tan^2\left(\frac{x}{3}\right) + \ln\left|\cos^3\left(\frac{x}{3}\right)\right| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g)}\int \cot^3(5x)\ dx &= \int \cot^2(5x)\cot(5x)\ dx = \int \left(\csc^2(5x)-1\right)\cot(5x)\ dx \\
&= \int \csc^2(5x)\cot(5x)\ dx - \int \cot(5x)\ dx \\
&= -\frac{1}{5}\int -5\csc^2(5x)\cot(5x)\ dx - \frac{1}{5}\int \frac{5\cos(5x)}{\sin(5x)}\ dx \\
&= -\frac{1}{5}\frac{\cot^2(5x)}{2} + \ln|\sin(5x)| + C = -\frac{1}{10}\cot^2(5x) + \ln|\sin(5x)| + C
\end{aligned}$$

4. $y = \ln x$, $y = \ln(x+2)$, $y = \ln(4-x)$ e $y = 0$.
5. $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 4$.
6. $y = -x^2 + 4x - 3$ e as retas tangentes à curva nos pontos $(0, -3)$ e $(3, 0)$
7. $y = -x^2 + 2x$ e $y = (x-2)^2$
8. $y^3 = x$, $x = 2$, $x = 0$ e o eixo das abcissas.

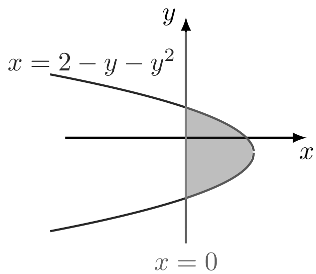
Resolução:

1. $x = 2 - y - y^2$ e o eixo das ordenadas.

   Vértice da parábola: $x' = 0 \Leftrightarrow -1-2y = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2} \therefore x = \dfrac{5}{4}$, $V = \left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$

   Expressão da parábola em ordem a y

$$\begin{aligned} x = 2 - y - y^2 \Leftrightarrow &\Leftrightarrow y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 2 - x \\ &\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - x \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - x} \end{aligned}$$

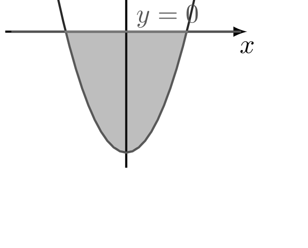


$$A = \int_0^{\frac{5}{4}} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - x}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - x}\right) dx = \int_0^{\frac{5}{4}} 2\left(\frac{9}{4} - x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{-2\left(\frac{9}{4} - x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{5}{4}} = \left[\frac{-4}{3}\right] - \left[\frac{-4\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)}}{3}\right] = \left[\frac{-4}{3}\right] - \left[-\frac{9}{2}\right] = \frac{5}{2}\, u.a$$

$$x = 0 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1 \quad \therefore I = \int_{-2}^{1} \left(2 - y - y^2\right)\, dy$$

2. $x^2 - y = 4$ e o eixo dos xx.



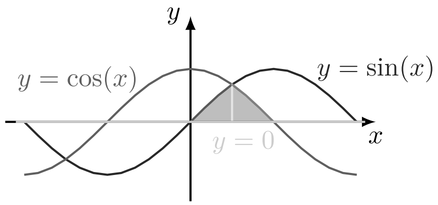
$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$\begin{aligned} A = \int_{-2}^{2} -\left(x^2 - 4\right)\, dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} \\ &= \left[-\frac{8}{3} + 8\right] - \left[\frac{8}{3} - 8\right] = \frac{32}{3}\, u.a. \end{aligned}$$

$$I = 2\int_0^3 \left[2 - \left(1+\sqrt{\frac{3-y}{2}}\right)\right] dy + \int_3^5 2dy + 2\int_5^8 \left[(2) - \left(1+\sqrt{\frac{y+11}{3}}\right)\right] dy$$

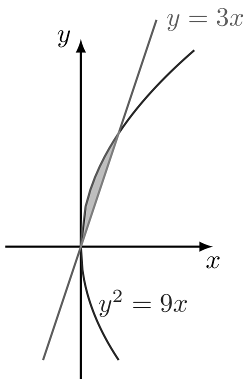
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [(\arccos y) - (\arcsin y)]\, dy$

(restringidas as funções $y = \sin x$; $y = \cos x$ ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



$$\text{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$$

6. $\displaystyle\int_0^1 \left[\left(\sqrt{9x}\right) - (3x)\right]\ dx$



I_1 $3x = \sqrt{9x}$

$9x^2 = 9x$

$9x\,(x-1) = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = 1$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

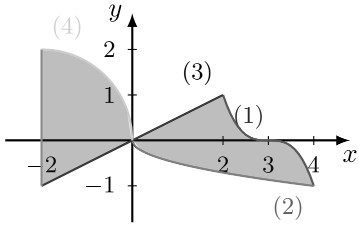
$$y = \sqrt{9x} \Leftrightarrow y^2 = 9x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{9}$$

$$y = 3x \Leftrightarrow x = \frac{y}{3}$$

$$I = \int_0^1 \left[(3x) - \left(3\sqrt{x}\right)\right] dx = \int_0^3 \left[\left(\frac{y}{3}\right) - \left(\frac{y^2}{9}\right)\right] dy$$

7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1}{x^2+1}\right) - \left(\frac{x^2}{2}\right)\right]\ dx$

(i)



$(1):\ y = -(x-3)^3$

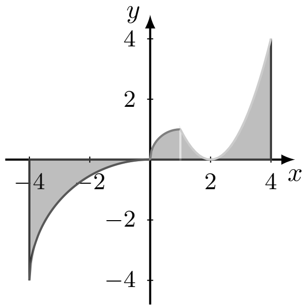
$(2):\ y = -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

$(3):\ y = \dfrac{x}{2}$

(4) : arco de circunferência $C(-2,0)$, $r = 2$

0

(j)

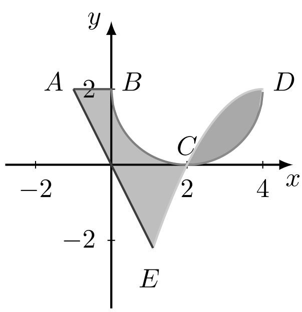


(1) : arco de circunferência $C(0,-4)$, $r = 4$

(2) : arco de circunferência $C(1,0)$, $r = 1$

$(3):\ y = (x-2)^2$

(k)



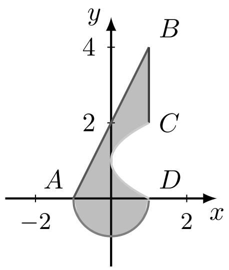
$(1): y = 2$

(2) : arco de circunferência $C(2,2)$, $r = 2$

$(3):\ y = 2 - \dfrac{(x-4)^2}{2}$

$(4):\ y = -2x$

(l)



$(1): y = 2x + 2$

(2) : arco de circunferência $C(0,0)$, $r = 1$

$(3):\ x = (y-1)^2$

CÁLCULO I

Conceitos, Exercícios e Aplicações

2.ª Edição

Ana C. Meira Castro
Ana Júlia Viamonte
António Varejão Sousa

Sobre a obra

Este livro pretende fornecer aos estudantes dos cursos de Engenharia um texto que seja, simultaneamente, elementar e rigoroso e que lhes permita aprender os conceitos básicos do cálculo infinitesimal e as suas aplicações.

Conscientes da vastidão de possíveis caminhos a seguir na apresentação das matérias, os autores optaram por seguir uma sequência simples que tivesse em linha de conta os atuais ajustes dos objetivos da unidade curricular em que esta temática se enquadra, face à atual tendência para a diminuição dos tempos letivos.

Neste sentido, este livro está organizado em três capítulos, ao longo dos quais se procurou obedecer a uma estrutura evolutiva em torno do rigor e da formalidade, mas sem excessos de nomenclatura.

No primeiro capítulo estudam-se as funções reais de variável real, o segundo capítulo incide sobre o estudo da natureza de séries numéricas e funcionais e o terceiro capítulo destina-se ao cálculo integral.

Em cada capítulo é proporcionado um conjunto de exercícios variados e não repetitivos, em número suficiente e equilibrado, apresentando-se alguns deles já resolvidos, propondo-se outros para resolução e ilustrando algumas aplicações práticas de integração de conhecimentos.

Sobre os autores

Os autores são docentes do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia (ISEP)

Ana C. Meira Castro é doutorada em Ciências de Engenharia e investigadora no CERENA – Centro de Recursos Naturais e Ambiente.

Ana Júlia Viamonte é doutorada em Ciências, área de Matemática e área específica de Álgebra Linear Numérica e investigadora no LEMA – Laboratório de Engenharia Matemática do ISEP.

António Varejão Sousa é doutorado em Ciências de Engenharia e investigador no LEMA – Laboratório de Engenharia Matemática do ISEP.

Também disponível em formato *e-book*

ISBN: 978-989-910-146-3

9 789899 101463

www.**engebook**.pt

engebook