LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

CÁLCULO INTEGRAL

EXERCÍCIOS SOBRE INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

engebook

AUTOR
Luís António de Almeida Vieira

TÍTULO
Cálculo Integral – Exercícios sobre Integrais de Superfície

EDIÇÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA
Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO
Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

REVISÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

DESIGN DE CAPA
Delineatura, Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO
Setembro, 2022

DEPÓSITO LEGAL
504082/22

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU

51	Matemática
517	Análise Matemática

ISBN

Papel:	9789899101302
E-book:	9789899101319

Catalogação da publicação

Família:	Bases de Engenharia
Subfamília:	Matemática

Conteúdo

1.1 Descrição de algumas regiões do plano

Exercício 1.1.1. *Faça um esboço da região do plano* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1 \leq y \leq 2) \wedge (y-1 \leq x \leq y+1)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \leq y \leq -1) \wedge (-y-1 \leq x \leq 1-y)\}$.

Resolução 1.1.1. *Apresentamos na figura 1.1 a região D.*

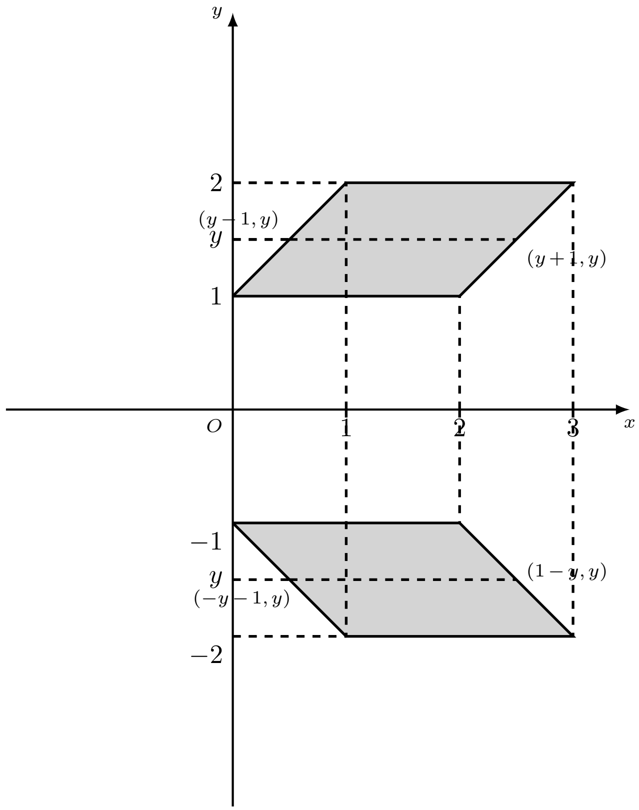

Figura 1.1: Região D do problema 1.1.1.

2.1 Superfícies de $\mathbb{R}^3$ projeções e parametrizações

Exercício 2.1.1. *Faça um desenho dos sólidos* S_1 *de* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \le y \le 1) \wedge (y \le z \le 2y) \wedge (2 \le x \le 6)\}$ *e* $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \le z \le 1) \wedge (1 \le y \le 2) \wedge (z+1 \le y \le 2)\}$. *Em seguida s obtenha projeções de* S_1 *em cada um dos planos coordenados e depois obtenha uma parametrização de cada face de* S_1. *Finalmente obtenha parametrizações das faces de* S_2 *e as suas projeções em cada um dos planos coordenados.*

Resolução 2.1.1. *O sólido* S *está representada na figura 2.1.*

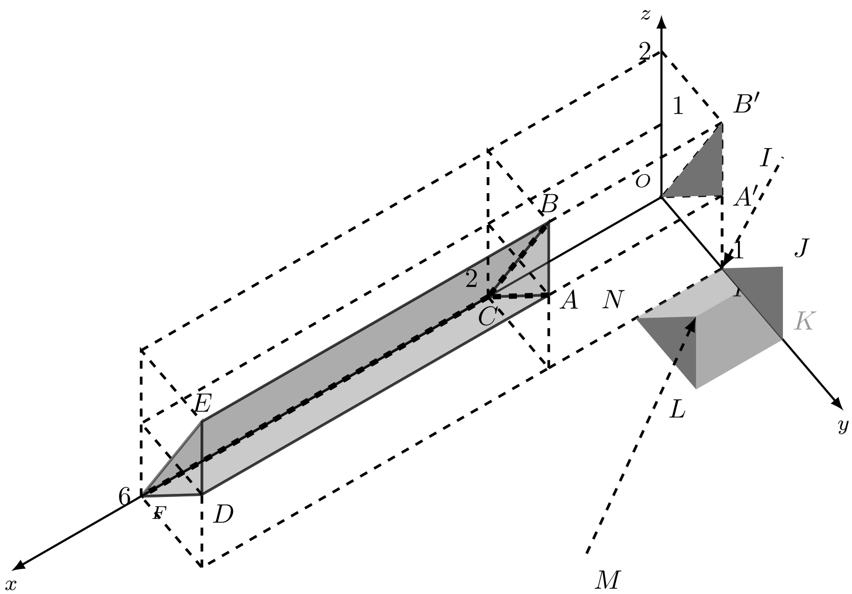

Figura 2.1: Região W.

Finalmente, apresentamos na figura 2.16 a projeção de W no plano Oxz.

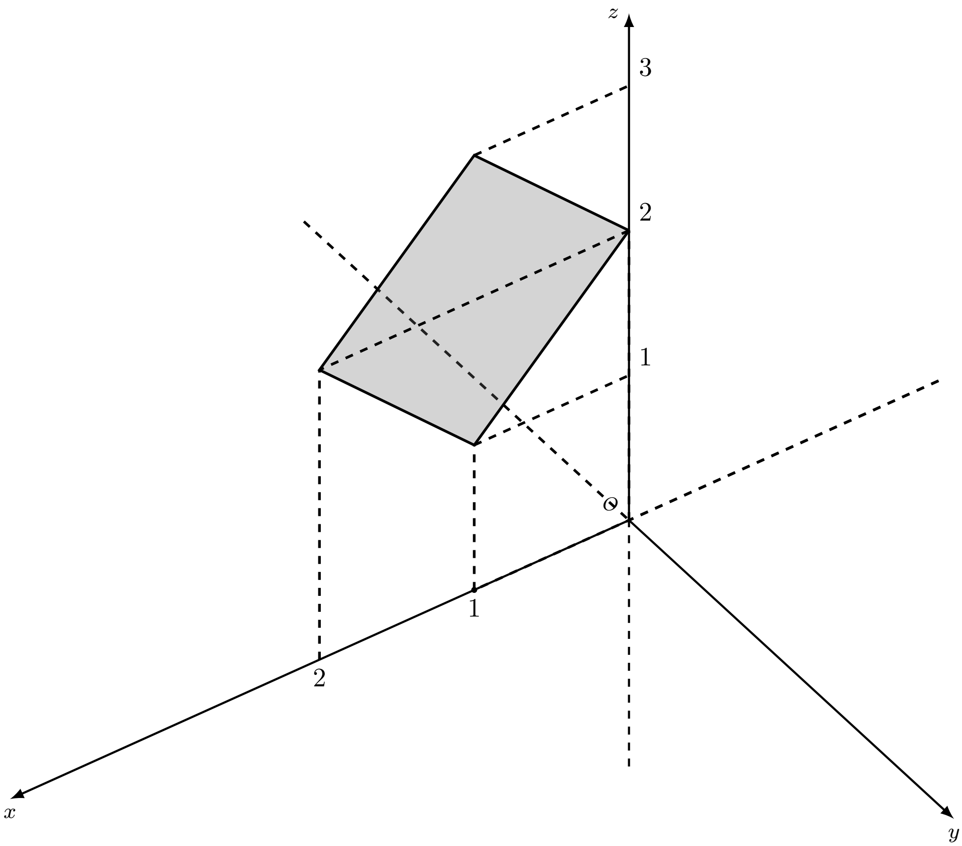

Figura 2.16: Projeção da região W do problema 2.1.4 no plano coordenado Oxz.

Assim, temos como parametrizações das superfícies S_1 e S_2 respetivamente as aplicações $f_1(r,\theta) = (1 + r\cos(\theta), r sen(\theta), 1 + r)$ *com* $(r,\theta) = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq \theta < 2\pi) \wedge (0 \leq r \leq 1)\}$ *e* $f_2(r,\theta) = (1 + r\cos(\theta), r sen(\theta), 3 - r)$ *com* $(r,\theta) = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq \theta < 2\pi) \wedge (0 \leq r \leq 1)\}$.

Exercício 2.1.5. *Considere a superfície S definida através da igualdade* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z = x) \wedge (0 \leq x \leq 4) \wedge (1 \leq y \leq 4)\}$. *Encontre a projeção de S*

Parametrizar S é fazer a projeção, supondo que essa projeção é uma aplicação injetiva, de S no plano Oyz e depois escrever $r(y,z) = (x(y,z),y,z) \in S$ em função só de y e z e portanto $r(y,z) = (4-y-z,y,z)$ com $(y,z) \in D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq y \leq 4) \wedge (0 \leq z \leq 4-y)\}$. Representamos o domínio da parametrização r na figura 2.28.

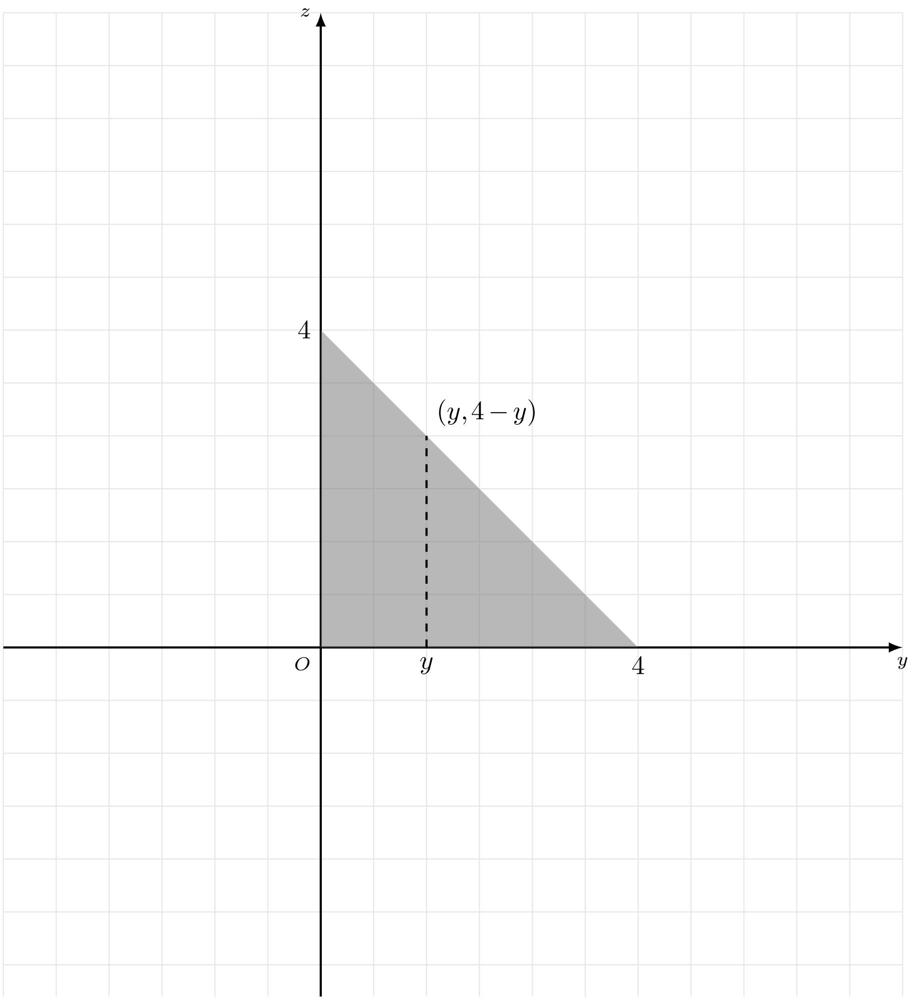

Figura 2.28: Domínio da parametrização r.

2.2 Integrais de superfície de funções escalares sobre superfícies

Exercício 2.2.1. *Considere a função* $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *tal que* $f(x,y)=3\frac{y^2}{\sqrt{1+4y^2}}$. *Calcule o integral* $\int\int_{S_1} f dS$ *onde* $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(-1<x<1)\wedge(-1<y<1)\wedge(z=2+y^2)\}$.

Resolução 2.2.1. *Apresenta-se a representação gráfica da superfície S na figura 2.31.*

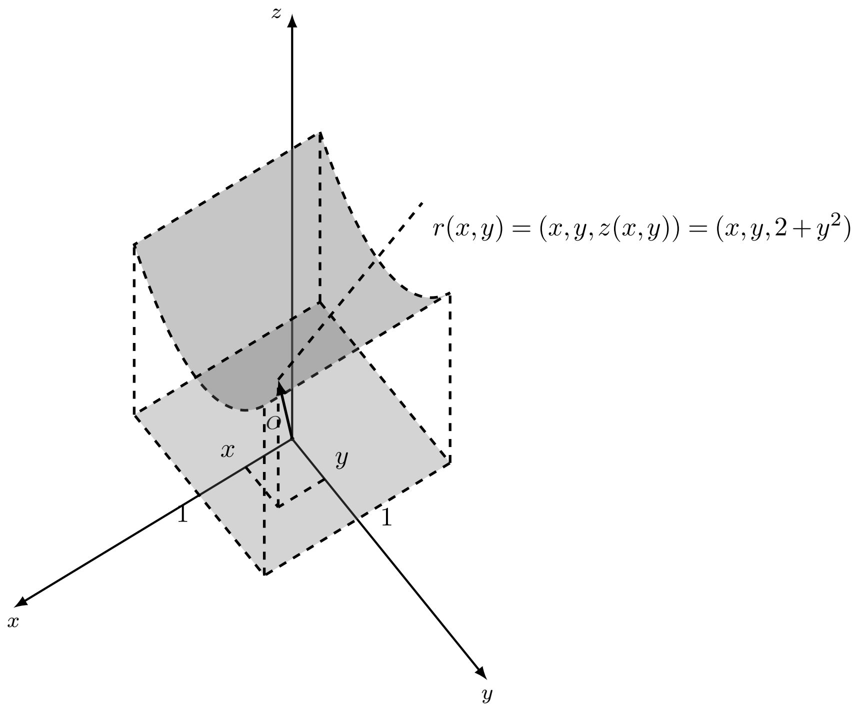

Figura 2.31: $r(x,y)=(x,y,2+y^2)$ com $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(-1\le x\le 1)\wedge(-1\le y\le 1)\}$.

Exercício 2.2.3. *Considere a superfície esférica S_1 centrada em $(2,0,2)$ de raio 2. Obtenha o valor do integral $\int\int_{S_1} zdS$.*

Resolução 2.2.3. *Considere-se a superfície esférica S_1 de raio 4 apresentada na figura 2.32.*

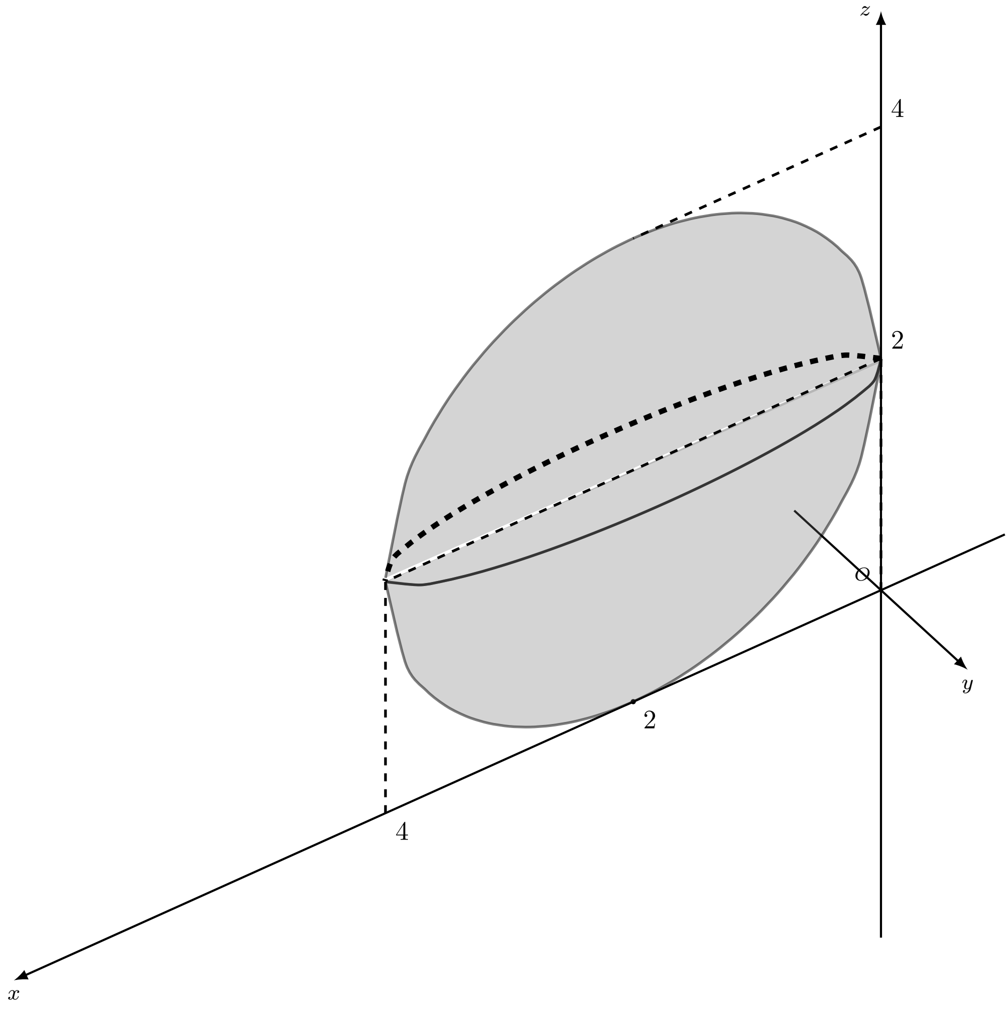

Figura 2.32: Superfície esférica $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=4$.

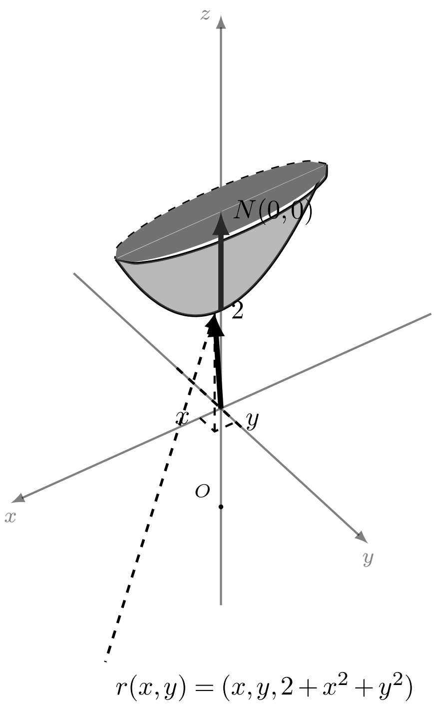

Figura 2.37: $r(x,y) = (x,y,2+x^2+y^2)$.

Assim, temos que

$\int\int_{S_1} F \cdot dS = \int\int_D F(r(x,y)) \cdot N(x,y)dydx$

$= \int\int_D (x,y,2+x^2+y^2-x^2-y^2)|(-2x,-2y,1)dydx = \int\int_D (-2x^2-2y^2+2)dydx$

$= \int\int_D (-2(x^2+y^2)+2)dydx = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r^2+1)rdrd\theta$

$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r^3+r)drd\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right)|_0^1 d\theta$

$= 2\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)d\theta = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = \frac{1}{2}\theta|_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2}2\pi = \pi.$

Resolução 2.3.4. *Apresentamos na figura 2.39 a região E.*

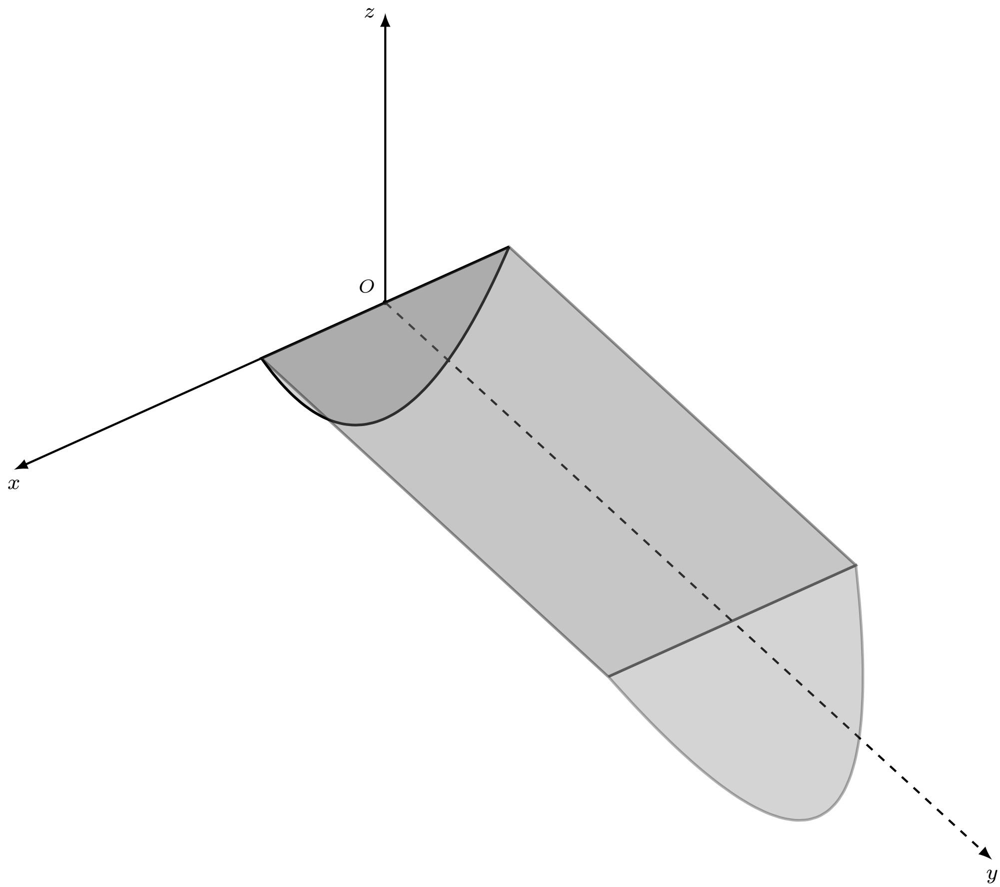

Figura 2.39: Região E.

Assim, como S_E é uma região elementar simétrica de $\mathbb{R}^3$ e F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ então pelo Teorema de Gauss concluímos que

$$\int\int_{S_E} F \cdot dS = \int\int\int_E div\ F dy dz dx.$$

Começamos por apresentar um esboço de S_1 na figura 2.41.

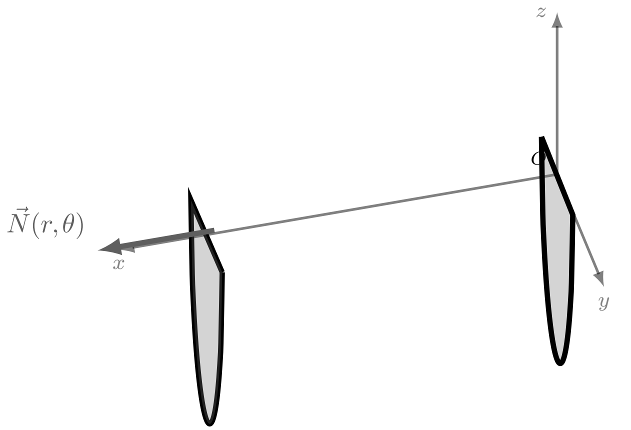

Figura 2.41: Region S_1.

Considere-se a parametrização r de S_1, definida por $r(x,y) = (6,y,z)$ com

$$(y,z) \in D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (y^2 + z^2 \leq 1) \wedge (-1 \leq z \leq 0)\}$$

e, portanto obtemos os seguintes cálculos:

$$\frac{\partial r}{\partial y}(y,z) = (0,1,0), \frac{\partial r}{\partial z}(y,z) = (0,0,1)$$

$$\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial y}}(y,z) \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial z}}(y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}.$$

Resolução 2.3.10. *Na figura 2.43 apresenta-se a figura* S_1.

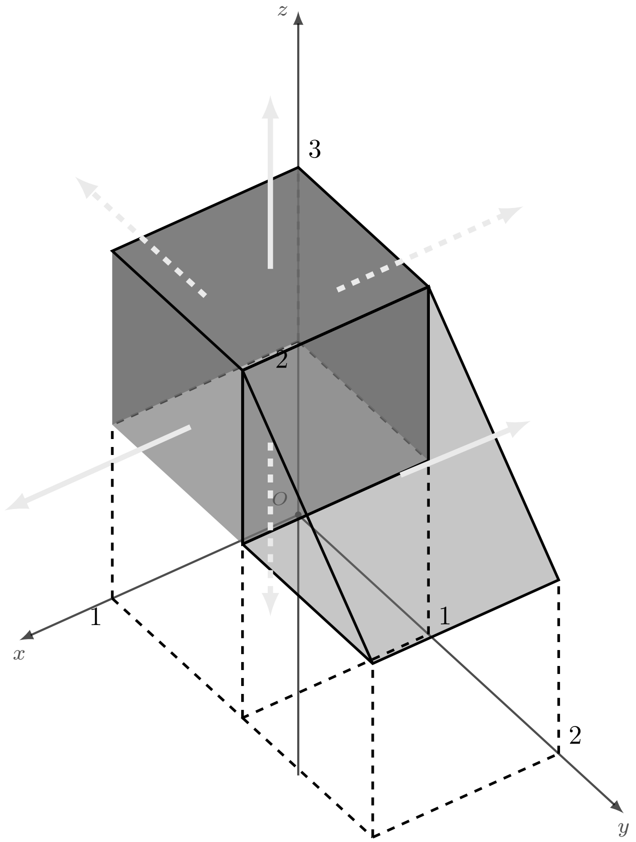

Figura 2.43: Superfície S_1 é a reunião das faces do sólido W.

Visto que a superfície S_1 *e o Campo* F *verificam as condições do Teorema de Gauss então pelo Teorema de Gauss, concluímos que:* $\int\int_{S_1} F \cdot dS = \int\int\int_W Div\ F(x,y,z) dzdydx$ *onde* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (2 \leq z \leq 3) \wedge (0 \leq y \leq 4 - z)\}$. *Como*

$$\begin{aligned} Div\ F(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y^3}{3}) + \frac{\partial}{\partial z}(zy^2) \\ &= y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2 \end{aligned}$$

Resolução 2.3.11. *Apresenta-se a superfície S na figura 2.44.*

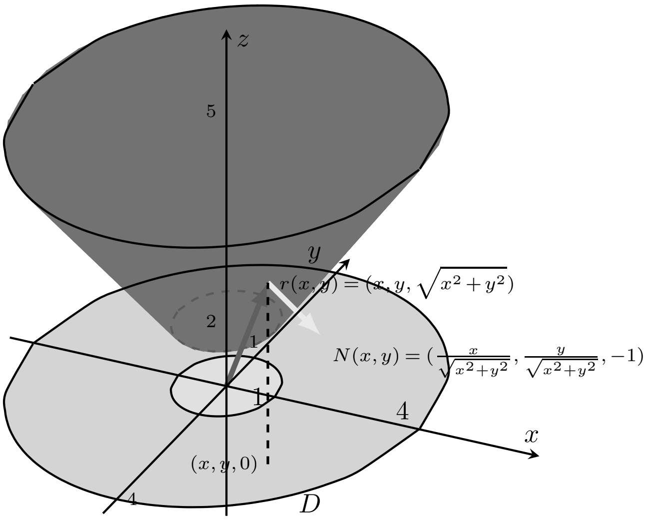

Figura 2.44: Superfície S.

Considere-se a parametrização r de S definida por

$$r(x,y) = (x,y,\sqrt{x^2+y^2})$$

com $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4\}$. *Assim, temos que:*

$$T_x(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) = (1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

e

$$T_y(x,y) = \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) = (0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}).$$

Resolução 2.3.12. *Visto que a projeção de S_1 no plano Oxy na direção de Ox é a região D e é feita de um modo injetivo podemos portanto considerar a parametrização r de S definida por $r(x,y) = (x,y,x)$com $(x,y) \in D$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 2x)\}$. Assim, considerem-se os seguintes cálculos: $T_x(x,y) = (1,0,1)$ e $T_y(x,y) = (0,1,0)$. E, portanto*

$$\begin{aligned}
\vec{N}(x,y) &= \overrightarrow{T_x}(x,y) \times \overrightarrow{T_y}(x,y) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= -1\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}.
\end{aligned}$$

Então temos que $N(x,z) = (-1,0,1)$. Assim, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\int\int_{S_1} F \cdot dS &= \int\int_D F(r(x,y)) \cdot N(x,y) dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{2x} F(x,y,x) \cdot (-1,0,1) dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{2x} (x^2, y^3, 2x) \cdot (-1,0,1) dydx
\end{aligned}$$

Resolução 2.3.14. *Apresentamos na figura 2.48 a superfície S.*

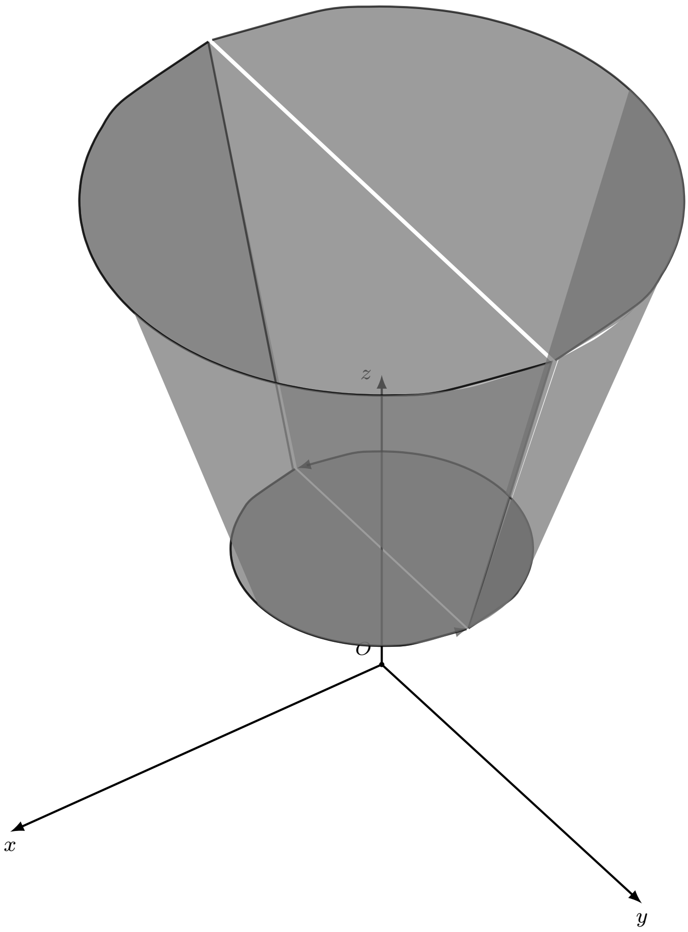

Figura 2.48: Superfície S_W.

Temos agora que, relembrando que $F(x,y,z) = (x^4z^2, y^4z^2, z)$,

$$divF = 4x^3z^2 + 4y^3z^2 + 1.$$

Exercício 4.1.16. *Sejam* S_W *a superfície que é fronteira do sólido* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 + y^2 + z^2 \leq x \leq 10 - y^2 - z^2\}$ *orientada com a normal exterior e* $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *o campo vetorial tal que* $F(x,y,z) = (x,y,z)$. *Calcule o valor do integral* $I = \int\int_{S_w} F \cdot dS$.

Exercício 4.1.17. *Considere a superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z = y^2 - 4y + 6) \wedge (0 \leq x \leq 2) \wedge (0 \leq y \leq 2)\}$ *e a função escalar* $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} : f(x,y,z) = \frac{xy}{\sqrt{1+4(y-2)^2}}$. *Calcule* $I = \int\int_S f dS$. *Apresenta-se na figura 4.3 o desenho de S.*

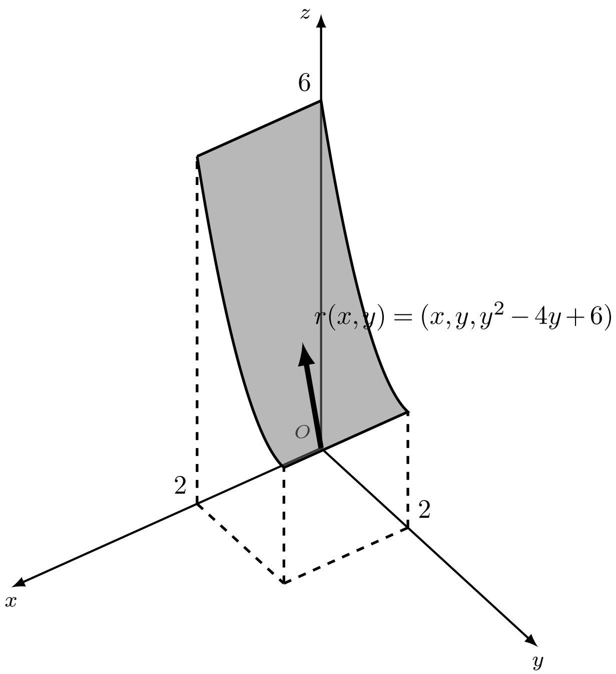

Figura 4.3: Superfície $S, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 2) \wedge (0 \leq y \leq 2)\}$.

Exercício 4.1.18. *Sejam C o bordo da superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y + z = 4) \wedge (0 \leq x \leq 4) \wedge (0 \leq y \leq 4)\}$ *orientada tal como indica na figura 4.4 e o campo* $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *tal que* $F(x,y,z) = (z,x,y)$ *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Calcule* $\oint_C F \cdot dr$ *recorrendo ao Teorema*

CÁLCULO INTEGRAL

EXERCÍCIOS SOBRE INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

Sobre a obra

Este é o quarto livro do autor no âmbito do Cálculo Integral, constituindo uma obra cujos objetivos principais são contribuir para que as matérias lecionadas nas disciplinas de Matemática se tornem mais atrativas e demonstrar ao leitor a necessidade da Matemática no desenvolvimento científico dos alunos de Engenharia. Em particular, neste caso, de uma forma eminentemente prática sobre a temática de Integrais de Superfície.

Neste livro pretende-se demonstrar, de um modo apelativo, os conceitos necessários para o encadeamento da matéria, apresentando uma coletânea de exercícios sobre Integrais de Superfície, por forma a configurar-se assim numa ferramenta de apoio didático que o autor disponibiliza no sentido de combater as dificuldades detetadas na aprendizagem desta temática.

Sobre o autor

Luís António de Almeida Vieira
Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil, licenciou-se em Matemática Aplicada no Ramo Científico na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 1985, tendo obtido o grau de Doutor em Matemática pela Universidade de Aveiro em 2004.

Começou, a partir de 1985, por ser Professor na Escola Secundária Clara Resende, lecionando Matemática. Continua a sua carreira como Professor de Matemática no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, onde leciona as aulas teóricas das unidades curriculares de Análise Matemática I, Análise Matemática II, Análise Matemática VI, Introdução à Topologia, Introdução à Lógica, Álgebra Linear, e as aulas práticas das unidades curriculares de Investigação Operacional e de Análise Numérica. Em 1990, inicia a sua carreira como Professor no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, na Secção de Matemática, onde assume as regências das unidades de Análise Matemática I, Análise Matemática II e Álgebra Linear, e leciona as aulas práticas destas unidades e da unidade de Estatística.

Ao longo da sua carreira letiva produziu várias monografias sobre Álgebra de Jordan. Na vertente de investigação publica artigos em que pretende estabelecer uma interligação entre análise, álgebra e combinatória.

Pertence atualmente ao Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP).

Também disponível em formato *e-book*

ISBN: 978-989-910-130-2

9 789899 101302

www.**engebook**.pt

engebook