ÁLGEBRA MATRICIAL

Exercícios Propostos e Resolvidos

Ana C. Meira Castro | Ana Júlia Viamonte | António Varejão Sousa

engebook

AUTORES
Ana C. Meira Castro
Ana Júlia Viamonte
António Varejão Sousa

TÍTULO
Álgebra Matricial – Exercícios Propostos e Resolvidos

EDIÇÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt

CHANCELA
Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO
Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN DE CAPA
Delineatura – Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO
Outubro, 2021

DEPÓSITO LEGAL
489603/21

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU
512 Álgebra

ISBN
Papel: 9789899017771
E-book: 9789899017788

Catalogação da publicação
Família: Bases de Engenharia
Subfamília: Matemática

Este livro protege o ambiente

Na produção deste livro foi utilizado papel proveniente de florestas de gestão sustentável.
A dimensão das folhas foi otimizada para evitar desperdícios de corte.
Na impressão foram utilizadas tintas de baixo teor de solvente.

Índice

Capítulo

1

Estruturas Algébricas

1.1. Exercícios relativos a estruturas algébricas

1. Considere a operação binária $\oslash$ definida em $\mathbb{N}$ por $a \oslash b = ab + 1$.
Verifique se a operação

   a) é interna

   b) é associativa

   c) é comutativa

   d) tem elemento neutro.

Resolução.

a) A operação $\oslash$ é interna, porque a adição e produto de naturais é ainda um número natural.

b) $\oslash$ é associativa se, e só se $\forall a, b, c \in \mathbb{N},\ (a \oslash b) \oslash c = a \oslash (b \oslash c)$

$(a \oslash b) \oslash c = (ab + 1) \oslash c = (ab + 1)\, c + 1 = abc + c + 1$

$a \oslash (b \oslash c) = a \oslash (bc + 1) = a\,(bc + 1) + 1 = abc + a + 1$

Como $(a \oslash b) \oslash c \neq (a \oslash b) \oslash c$, tem-se que $\oslash$ não é associativa.

c) É comutativa se, e só se $\forall a, b \in \mathbb{N},\ a \oslash b = b \oslash a$

Como a multiplicação de números naturais é multiplicativa, tem-se

$a \oslash b = ab + 1 = ba + 1 = b \oslash a$

b) $z_2 = (1+i)^{16} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{16} = 2^8 e^{4\pi i} = 256(\cos(0) + i\sin(0))$

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\Theta = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \Theta = \dfrac{\pi}{4}$

c)

d) $z_4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2} = \sqrt[3]{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2} = \sqrt[3]{e^{\frac{\pi}{2}i}} = e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i},$

$k = 0, 1, 2$

$z_4 = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; $z_4 = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

$z_4 = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

■

3. Simplifique os seguintes números complexos

a) $z_1 = \left(\dfrac{25}{(1-4i)(5+3i)}\right)^2$

b) $z_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^3 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^3$

c) $z_3 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^5 + \left(1-\sqrt{3}i\right)^5$.

Resolução.

a) $z_1 = \left(\dfrac{25}{(1-4i)(5+3i)}\right)^2 = \left(\dfrac{25}{(5+12)+(3-20)\,i}\right)^2 = \left(\dfrac{25}{17-17i}\right)^2$

$= \left(\dfrac{25}{17}\right)^2 \left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2 = \left(\dfrac{25}{17}\right)^2 \left(\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \left(\dfrac{25}{17}\right)^2 \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^2$

$= \left(\dfrac{25}{17}\right)^2 \dfrac{1+2i-1}{4} = \dfrac{625}{578}i$

b)

c) $z_3 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^5 + \left(1-\sqrt{3}i\right)^5$

$1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

pois $\rho = \sqrt{1+3} = 2$ e $\tan\Theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \Theta = \dfrac{\pi}{3}$

Analogamente, $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Logo,

$$x_4 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\pi+2\times4\times\pi}{6}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$$

$$x_5 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\pi+2\times5\times\pi}{6}i} = e^{\frac{11\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$$

d) $x^3 + 8 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = -8$

$$z = -8; \rho = 8 \text{ e } \tan\Theta = \frac{0}{-8} = 0 \Rightarrow \Theta = \pi$$

$$x^3 = 8e^{\pi i} \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$x_0 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\pi+2\times0\times\pi}{3}i} = 2\, e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}\, i$$

$$x_1 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\pi+2\times1\times\pi}{3}i} = 2\, e^{\pi i} = 2\,(-1 + 0i) = -2$$

$$x_2 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\pi+2\times2\times\pi}{3}i} = 2\, e^{\frac{5\pi}{3}i} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\, i$$

$$\left\{1 + \sqrt{3}\, i, -2, 1 - \sqrt{3}\, i\right\}$$

e) $z^2 - (3 - 2i)\, z + 1 - 3i = 0$

$$z = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{(3-2i)^2 - 4 + 12i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{9 - 12i - 4 - 4 + 12i}}{2}$$

$$= \frac{3 - 2i \pm 1}{2} \Longleftrightarrow z = 2 - i \ \vee \ z = 1 - i$$

$$\{1 - i, 2 - i\}$$

f)

■

5. Calcule as quatro raízes de $z^4 + 1 = 0$ e utilize o resultado para deduzir a fatorização $z^4 + 1 = \left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right)$.

Resolução.

$$z^4 + 1 = 0$$

$$z^4 = -1$$

$$z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{\pi i}} = e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$z = e^{\frac{\pi}{4}i};\ z = e^{\frac{3\pi}{4}i};\ z = e^{\frac{5\pi}{4}i};\ z = e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$$

Capítulo

2

Matrizes e Determinantes

2.1. Exercícios relativos a operações com matrizes

1. Considere a matriz identidade, **I**, a matriz nula, **0**, e as seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sabendo que $\mathbf{A}^k$ é o produto de uma matriz real quadrada $\mathbf{A}$ por si própria k vezes, por exemplo, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, deduza

a) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$.

Resolução.

a)

$$\mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^3} = \mathbf{A^2 A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^4} = \mathbf{A^3 A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $\mathbf{A^n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$.

b)

c)

$$\mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 3 \times 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^3} = \mathbf{A^2 A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 3 \times 2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^4} = \mathbf{A^3 A} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 3 \times 2^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Exercícios relativos a operações sobre matrizes

1. Considere as matrizes do enunciado do exercício 1. de 2.1 e encontre a matriz $\mathbf{X}$ que satisfaz as seguintes igualdades

   a) $\mathbf{J}^T\mathbf{K} + \mathbf{X}\,\mathbf{I} = \mathbf{0}$

   b) $(2\mathbf{CB} - \mathbf{G} + \mathbf{X})^T = \mathbf{I}$

   c) $(\mathbf{QP})^T\,\mathbf{G}^2 = \mathbf{X} - 3\mathbf{I}$.

Resolução.

a) $\mathbf{J}^T\mathbf{K} + \mathbf{X}\,\mathbf{I} = \mathbf{0}$

$\mathbf{X}\,\mathbf{I} = -\mathbf{J}^T\mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{X} = -\mathbf{J}^T\mathbf{K}$

$$\mathbf{X} = -\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -4 & 1 \\ -21 & -9 & -7 \\ -5 & -18 & -27 \end{bmatrix}$$

b) $(2\mathbf{CB} - \mathbf{G} + \mathbf{X})^T = \mathbf{I}$

$(2\mathbf{CB} - \mathbf{G} + \mathbf{X}) = \mathbf{I}^T \Leftrightarrow X = \mathbf{I} + G - 2CB$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -10 & -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -7 & -37 \end{bmatrix}$$

c)

■

2. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação "$(\mathbf{ABC})^T$ representa uma matriz real 3×1, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz real 3×3, $\mathbf{B}$ é uma matriz real 3×2 e $\mathbf{C}$ uma matriz real 2×1".

3. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes quadradas de ordem n simétricas. Prove que $\mathbf{AB}$ é simétrica se e só se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são permutáveis (aplique as propriedades da transposição).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{C_2 \leftrightarrow C_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = 2$$

$$\text{Conclusão: car}(\mathbf{A}) = \begin{cases} 3 & \Leftarrow a \neq -b \wedge b \neq 1 \\ 2 & \Leftarrow b = 1, \forall a \\ 2 & \Leftarrow a = -b, \forall b \end{cases}$$

d) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & a & 4 \\ 4 & a & 4 & 4 \\ 4 & b & b^2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & a \end{bmatrix}_{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & a & 4 \\ 0 & (a-4) & (4-a) & 0 \\ 0 & (b-4) & \left(b^2 - a\right) & 0 \\ 0 & 0 & (4-a) & (a-4) \end{bmatrix}_{L_2 \leftrightarrow L_4}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & a & 4 \\ 0 & 0 & (4-a) & (a-4) \\ 0 & (b-4) & \left(b^2 - a\right) & 0 \\ 0 & (a-4) & (4-a) & 0 \end{bmatrix}_{C_2 \leftrightarrow C_4}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & a & 4 \\ 0 & (a-4) & (4-a) & 0 \\ 0 & 0 & \left(b^2 - a\right) & (b-4) \\ 0 & 0 & (4-a) & (a-4) \end{bmatrix}_{C_3 = C_3 + C_4}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & (a+4) & 4 \\ 0 & (a-4) & (4-a) & 0 \\ 0 & 0 & \left(b^2 - a + b - 4\right) & (b-4) \\ 0 & 0 & 0 & (a-4) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = 4 \; sse \; (a - 4 \neq 0) \wedge \left(b^2 + b - a - 4 \neq 0\right)$

se $a = 4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(b^2 + b - 8\right) & (b-4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & \left(b^2 + b - 8\right) & (b-4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{C_2 \leftrightarrow C_4}$$

2.3. Exercícios relativos a determinantes de uma matriz quadrada

1. Calcule

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 16 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2 & i \end{vmatrix}$

n) $\begin{vmatrix} 1-i & -1 & 2i \\ i-1 & 2+2i & 1+i \\ -2 & -i & 1 \end{vmatrix}$.

Resolução.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 = 3$

b)

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) = -6$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x & 2 & 2 \\ 0 & (1-6x) & -3 & -3 \\ 0 & 0 & (x+1) & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{C_3=C_3-C_4} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x & 0 & 2 \\ 0 & (1-6x) & 0 & -3 \\ 0 & 0 & (x-1) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-6x)(x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{6} \vee x = 1$$

g)

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -1 & (2+x) & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & (3+x) & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & (4+x) & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & (5+x) \end{vmatrix} = 0$$

$$6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & (2+x) & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & (3+x) & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & (4+x) & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & (5+x) \end{vmatrix}_{\substack{L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3+L_1 \\ L_4=L_4+L_1 \\ L_5=L_5+L_1}} = 0$$

$$6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (3+x) & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & (4+x) & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & (5+x) & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (6+x) \end{vmatrix} = 0$$

$$6(3+x)(4+x)(5+x)(6+x) = 0$$

$$x = -3 \vee x = -4 \vee x = -5 \vee x = -6$$

■

13. Sendo n um número natural e a, x_1, $x_2, \cdots, x_n$ números reais, utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que

2.4. Exercícios que envolvem o cálculo da matriz inversa

1. Encontre todos os valores reais de a e b para os quais as seguintes matrizes são invertíveis

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 1 & ab \\ 1 & a & b \\ -b & b & ab^2 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a & 2a \\ -1 & 2 & -a & 2 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & b \end{bmatrix}$.

Resolução.

a) Para que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ admita inversa, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\text{a} - 3$

Logo, $a \neq 1$.

b)

c) $$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a & 2a \\ -1 & 2 & -a & 2 \end{vmatrix}_{\substack{L_3=L_3-L_1 \\ L_4=L_4-L_1}}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -a & (2a-2) \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{vmatrix}_{\substack{L_3=L_3-L_2 \\ L_4=L_4-L_3}}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■

8. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e determine

a) $\det(\mathbf{X})$, sendo a matriz $\mathbf{X} = \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\right)^T$ e $\det(\mathbf{B}_{3\times3}) = 6$

b) $\det\left(\mathbf{X}^{-1}\right)$, sendo a matriz $\mathbf{X} = \mathbf{2A}$

c) $\det(\mathbf{X})$, sendo válida a igualdade matricial $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \mathbf{B}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}^{-1}$ e $\det(\mathbf{B}_{3\times3}) = 2$

d) $\det(\mathbf{X})$, sendo a matriz $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}^T$, $\det(\mathbf{B}_{3\times3}) = 3$ e $\mathbf{C}$ uma matriz que se obteve da matriz $\mathbf{A}$ por troca da 1ª com a 2ª linha.

Resolução.

a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}_{L_2 = L_2 - 2L_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12$

$$\det(\mathbf{X}) = \det\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\right)^T$$
$$= \det\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\right)$$
$$= \det\left(\mathbf{B}^{-1}\right)\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} \times (-12) = -2$$

b) $\det(\mathbf{X}) = \det(2\mathbf{A}) = 2^3 \det(\mathbf{A}) = 8 \times (-12) = -96$

$$\det\left(\mathbf{X}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{X})} = -\frac{1}{96}$$

c) $\det\left(\mathbf{B}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}^{-1}\right) = \det\left(\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\right)$

$$\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{X})\det\left(\mathbf{B}^{-1}\right) = \det\left(\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{T}}\right)$$

$$2\det(\mathbf{X})\,\frac{1}{2} = \det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$$

$$\det(\mathbf{X}) = -\frac{1}{12}$$

d) $\det(\mathbf{X}) = \det\left(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}^T\right)$

$$= \det(\mathbf{B})\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\det\left(\mathbf{C}^T\right)$$
$$= \det(\mathbf{B})\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\det(\mathbf{C})$$

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares

3.1. Resolução de sistemas de equações lineares

1. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y+4z-t=1 \\ x+4y+z+3t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \\ y-z+2t=0 \\ 3x+5y+4z=2 \end{cases}$

   a) diga quais as suas equações principais

   b) diga quais as suas incógnitas principais

   c) classifique o sistema e resolva-o.

Resolução.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-5L_1 \\ L_5=L_5-3L_1}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 3 & -1 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_4}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right]_{L_4=L_4-3L_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 3 \\ \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de incógnitas} = 4 \qquad \Rightarrow \text{SP1xI}^{3} \\ \text{grau de indeterminação} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z + 4t = 1 \\ 3y - z + 7t = 0 \\ -2z + t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2y - 2z - 4t \\ y = \dfrac{z - 7t}{3} \\ z = \dfrac{t}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2y - 2z - 4t \\ y = -\dfrac{13t}{6} \\ - - - \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = {}^{(3-2t)}/_{3} \\ y = -{}^{13t}/_{6} \\ z = {}^{t}/_{2} \end{array} \right.$$

Logo, $\left\{ \left(\dfrac{3-2t}{3}, \dfrac{-13t}{6}, \dfrac{t}{2}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$.

j) $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 5z + t = -1 \\ 3x + 5y + 4z = 2 \\ 3x + 3y - t = 1 \\ 3x + 4y + 5z - 2t = 2 \\ 2x + 2y + 2z + t = 1 \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -5 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2-3L_1 \\ L_3=L_3-3L_1 \\ L_4=L_4-3L_1 \\ L_5=L_5-2L_1}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & 19 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & 20 & -5 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & -1 & 3 \end{array}\right]_{\substack{C_2 \leftrightarrow C_4 \\ L_4=\frac{1}{5}L_4}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 19 & 11 & 5 \\ 0 & -4 & 15 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 12 & 6 & 3 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_4} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 15 & 9 & 4 \\ 0 & -3 & 19 & 11 & 5 \\ 0 & -1 & 12 & 6 & 3 \end{array}\right]_{\substack{L_3=L_3-4L_2 \\ L_4=L_4-3L_2 \\ L_5=L_5-L_2}}$$

[3] SPnxI - Sistema possível e indeterminado com grau n de indeterminação.

u) $\begin{cases} -x+y-z-t=0 \\ z+t=1 \\ -x+y=1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_1} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]_{C_3 \leftrightarrow C_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \\ \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas} = 4 \qquad\qquad \Rightarrow \text{SP2xI} \\ \text{grau de indeterminação} = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -x-z+y-t=0 \\ z+t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z+y-t \\ z=1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+y \\ z=1-t \end{cases}$$

Logo, $\{(-1+y, y, 1-t, t)\,, y, t \in \mathbb{R}\}$.

v) $\begin{cases} 2x+y+t=2 \\ 3x+3y+3z+5t=3 \\ 3x-3z-2t=3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right]_{C_1 \leftrightarrow C_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right]_{L_2=L_2-3L_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right]_{L_3=L_3+L_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \\ \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas} = 4 \qquad\qquad \Rightarrow \text{SP2xI} \\ \text{grau de indeterminação} = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y+2x+t=2 \\ -3x+3z+2t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-2x-t \\ x=\dfrac{3+3z+2t}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-6z-7t}{3} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2z-\frac{7}{3}t \\ x=1+z+\dfrac{2}{3}t \end{cases}$$

Logo, $\left\{\left(1+z+\dfrac{2}{3}t, -2z-\dfrac{7}{3}t, z, t\right), z, t \in \mathbb{R}\right\}$.

■

vi. $$[\,\mathbf{B}\,|\,\mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2+2L_1 \\ L_3=L_3+2L_1}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_3=L_3-\frac{10}{7}L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-6}{7} & \frac{-10}{7} & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_3=\frac{1}{3}L_2 \\ L_2=\frac{1}{7}L_2 \\ L_1=-L_1}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & -10/21 & 1/3 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2+L_3 \\ L_1=L_1-6L_3}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 5/7 & 60/21 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & -10/21 & 1/3 \end{array}\right]_{L_1=L_1+5L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/7 & 25/21 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & -10/21 & 1/3 \end{array}\right]$$

Logo, $$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/7 & 25/21 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ -2/7 & -10/21 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5/7 & 25/21 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ -2/7 & -10/21 & 1/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ -1 \\ -\frac{10}{7} \end{bmatrix}.$$

■

4. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$ e indique

a) para que valores de $a \in \mathbb{R}$, o sistema apresentado é de Cramer

b) uma sua solução, utilizando a regra de Cramer.

Capítulo

4

Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

4.1. Exercícios relativos a espaços vetoriais

1. Averigue se o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, algebrizados pelas operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de um escalar real por um número complexo, é um espaço vetorial real.

Resolução.

Seja a correspondência $\begin{cases} c = a + bi & \Rightarrow \mathbf{v} = (a, b)\,, a, b \in \mathbb{R} \\ c_1 = a_1 + b_1 i & \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (a_1, b_1)\,, a_1, b_1 \in \mathbb{R} \\ c_2 = a_2 + b_2 i & \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2)\,, a_2, b_2 \in \mathbb{R} \\ c_3 = a_3 + b_3 i & \Rightarrow \mathbf{v}_3 = (a_3, b_3)\,, a_3, b_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Verificação da axiomática de existência e unicidade da operação interna adição de números complexos e suas propriedades.

  A$_1$ Determinação

  $\forall \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{C}, (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \in \mathbb{C}$

  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = ((a_1 + a_2)\,, (b_1 + b_2)) \in \mathbb{C}$, pois a soma de números reais é ainda um número real.

  A$_2$ Associatividade

  $\forall \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \in \mathbb{C}, (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) + \mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 + (\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3)$

  $\{(a_1, b_1) + (a_2, b_2)\} + (a_3, b_3) = (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3))$

  $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) = (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3)$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 &= \left(b_1^2, b_1\right)+\left(b_2^2, b_2\right)\\ &= \left(b_1^2+b_2^2, b_1+b_2\right) \notin F \; pois \; b_1^2+b_2^2 \neq (b_1+b_2)^2\end{aligned}$$

Logo, o conjunto F não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

■

5. Averigue se os seguintes conjuntos, algebrizados pelas operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar real por um vetor, são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$

   a) $A=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : b=2a \wedge c=0\right\}$

   b) $B=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : b=0 \vee c=0\right\}$

   c) $C=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : c=2\right\}$

   d) $D=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : ab=0\right\}$

   e) $E=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a-b\leqslant 0\right\}$

   f) $F=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a+b\leqslant 1\right\}$

   g) $G=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a^2+b^2=1\right\}$

   h) $H=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a^2+b^2\leqslant 1\right\}$

   i) $I=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : |a|=|b|\right\}$.

Resolução.

a)

b)

c) $C=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : c=2\right\}$

Seja $\begin{cases}\mathbf{v}_1=(a_1,b_1,c_1)\in C \Rightarrow \mathbf{v}_1=(a_1,b_1,2)\\ \mathbf{v}_2=(a_2,b_2,c_2)\in C \Rightarrow \mathbf{v}_2=(a_2,b_2,2)\end{cases}$

Verificação do axioma para a soma de vetores, $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in C, (\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\in C$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 &= (a_1,b_1,2)+(a_2,b_2,2)\\ &= (a_1+a_2, b_1+b_2, 4)\notin C \text{ pois a } 3^{\text{a}}\text{coordenada é diferente de } 2\end{aligned}$$

O conjunto C não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

d)

e) $E=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a-b\leqslant 0\right\}$

Seja $\begin{cases}\mathbf{v}_1=(a_1,b_1,c_1)\in E \Rightarrow a_1\le b_1\\ \mathbf{v}_2=(a_2,b_2,c_2)\in E \Rightarrow a_2\le b_2\end{cases}$

Verificação do axioma para a soma de vetores, $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in E, (\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\in E$

9. Averigue quais os valores de a e b reais que tornam os vetores do conjunto
$A = \left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v}_1 = a\,(1,1,-1)\,, \mathbf{v}_2 = b\,(1,0,1)\,,\ \mathbf{v}_3 = (0,2,3)\right\}$
geradores do espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Resolução.

Os 3 vetores geram $\mathbb{R}^3$ se qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ for combinação linear dos vetores dados, isto é, se o sistema associado for um sistema possível e determinado.

A combinação linear é dada por $\sum\limits_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$

(construção da matriz)

$$k_1\,(a,a,-a) + k_2\,(b,0,b) + k_3\,(0,2,3) = (x,y,z)$$

$$(ak_1, ak_1, -ak_1) + (bk_2, 0, bk_2) + (0, 2k_3, 3k_3) = (x,y,z)$$

$$(ak_1 + bk_2, ak_1 + 2k_3, -ak_1 + bk_2 + 3k_3) = (x,y,z)$$

$$\begin{cases} ak_1 + bk_2 = x \\ ak_1 + 2k_3 = y \\ -ak_1 + bk_2 + 3k_3 = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & x \\ a & 0 & 2 & y \\ -a & b & 3 & z \end{array}\right]_{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & x \\ 0 & -b & 2 & y-x \\ 0 & 2b & 3 & z+x \end{array}\right]_{L_3 = L_3 + 2L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & x \\ 0 & -b & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 7 & z+2y-x \end{array}\right]$$

Como $SPD \Rightarrow \mathrm{n} = \mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = 3 \Longleftarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Logo, para que os vetores de A sejam geradores do espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

■

10. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e escreva o vetor $\mathbf{v}_3 = (2,6,0)$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,2,1)$.

Resolução.

A combinação linear é dada por $\sum\limits_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_3$, isto é,

$$k_1\,(1,1,-1) + k_2\,(0,2,1) = (2,6,0)$$

mente dependentes. Logo, $\mathbf{v}_4$ pode ser qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$. Por exemplo $v_4 = (1, 7, 5)$.

d) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$, isto é,

$k_1 (1, 1, 3) + k_2 (0, 3, 1) = (a, b, c)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 3 & b \\ 3 & 1 & c \end{array}\right]_{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & b-a \\ 0 & 1 & c-3a \end{array}\right]_{L_3 \leftrightarrow L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c-3a \\ 0 & 3 & b-a \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 3L_2} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c-3a \\ 0 & 0 & b+8a-3c \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Leftarrow b + 8a - 3c = 0$

Logo, o subespaço gerado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é o conjunto $S = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b + 8a - 3c = 0\right\}$.

■

23. Averigue a dependência/independência linear dos seguintes conjuntos

a) $A = \{(1, 2), (3, 4)\}$

b) $B = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$

c) $C = \{(1, 0, -1), (2, -2, 2), (3, 0, 1)\}$

d) $D = \{(0, 0, 0, 0)\}$

e) $E = \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (4, 3, 2, 1)\}$

f) O conjunto formado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (a, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, a, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 1, a)$

g) $G = \left\{-3x^2, 2x^2 + x + 1, x + 4\right\}$, do espaço dos polinómios de grau não superior a dois

h) O conjunto formado pelos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, tais que $\mathbf{v}_1 = (\cos(t), \sin(t))$, $\mathbf{v}_2 = (\cos(2t), \sin(2t))$ e $\mathbf{v}_3 = (\cos(3t), \sin(3t))$.

Resolução.

a)

b)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 2 & 4 & d \\ -2 & 2 & e \\ 3 & 3 & f \end{array}\right]_{\substack{L_4=L_4-2L_1 \\ L_5=L_5+2L_3 \\ L_6=L_6-3L_1}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 6 & d-2a \\ 0 & 0 & e+2a \\ 0 & 6 & f-3a \end{array}\right]_{L_6=L_6-L_4}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 6 & d-2a \\ 0 & 0 & e+2a \\ 0 & 0 & f-a-d \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow b = 0 \wedge c = 0 \wedge \underbrace{e + 2a = 0}_{e=-2a} \wedge \underbrace{f - a - d = 0}_{d=f-a}$$

Logo, o subespaço gerado por estas 2 matrizes é o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & f-a \\ -2a & f \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2} \right\}.$$

■

41. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (5, -1, 0)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$

  a) verifique se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$

  b) diga qual o espaço vetorial gerado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

  c) diga qual a dimensão desse subespaço

  d) indique uma sua base desse subespaço

  e) indique as componentes do vetor $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ e na base que definiu na alínea anterior.

42. Considere os vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, 3, -1)$ e $\mathbf{v}_4 = (0, -1, 1)$

  a) identifique o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por estes 4 vetores

  b) diga qual a dimensão desse subespaço

  c) indique uma sua base desse subespaço

4.2. Exercícios relativos a transformações lineares

1. Verifique se as seguintes transformações são, ou não, lineares

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(2x-y,-y)$

b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(xy,2x+y)$

c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(x+1,2y-1)$

d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=\left(y,x^2\right)$

e) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(e^x,e^y)$

f) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
$T(x,y)=(x\cos(\theta)-y\sin(\theta),x\sin(\theta)+y\cos(\theta))$

g) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x+2y,3x,2x-y+4z)$

h) $T:\mathbb{R}^{2\times1}\to\mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(x,2y-3)$

i) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(x+y,2x-y+z)$

j) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z,t)=(x-y,-3y,0)$

k) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $T(x,y,z)=xy$

l) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases}T(1,2,3)=(1,0,1)\\T(1,0,7)=(3,0,1)\\T(0,0,0)=(2,2,4)\end{cases}$

m) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ definida por $T(x,y,z,t)=(1,-1,2,3)$.

Resolução.

a)

b)

c) $T(x,y)=(x+1,2y-1)$; sejam

$$\begin{cases}\mathbf{u}_1\in\mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbf{u}_1=(x_1,y_1) & ;\quad T(\mathbf{u}_1)=(x_1+1,2y_1-1)\\ \mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbf{u}_2=(x_2,y_2) & ;\quad T(\mathbf{u}_2)=(x_2+1,2y_2-1)\end{cases}$$

Verificação do axioma $\forall\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2,T(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2)$

Seja $T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z) = (a,b,c)$

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ y+z=b \\ x+y-2z=c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right]_{L_3=L_3+L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a+b \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Leftarrow SP, \text{se } c-a+b=0$

Logo, $\text{Im}(T) = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = a-b\right\}$.

- Determinação de $\text{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\}$

  Seja $T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ y+z=b \\ x+y-2z=c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]_{\text{Im}(T)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  $\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Leftarrow \text{SP1xI}$

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z \\ y=-z \\ 0=0 \end{cases}$$

  Logo, $\text{N}(T) = \{(3z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

g) $T(p(x)) = p(x+1)$, onde p é um polinómio de grau igual ou inferior a 1

- Determinação da expressão da transformação linear

  Seja $p(x) = a + bx \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ um polinómio real de grau igual ou inferior a 1, representado pelo vetor $\mathbf{v} = (a,b)$

  $T(p(x)) = a + b(x+1) = a+b+bx$, como $p(x) = a+bx$ é representado pelo vetor $\mathbf{v} = (a,b)$, então

  $T(a,b) = (a+b,\, b)$

- Determinação de $\text{Im}(T)$

  $\text{Im}(T) = \{(a_1,b_1) \in V : \exists (a,b) \in V : T(a,b) = (a_1,b_1)\}$

  $T(a,b) = (a+b,\, b) = (a_1,b_1)$

$$\begin{cases} a+b=a_1 \\ b=b_1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & b_1 \end{array}\right]$$

  $\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Leftarrow SPD, \forall a_1, b_1$

  Logo, $\text{Im}(T) = \{(a_1,b_1) \in V\} = V$.

$$\begin{cases} y + 4z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ -3z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ x = x \end{cases}$$

Logo, $\mathrm{N}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \wedge z = 0\right\} = \left\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\right\}$

e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$.

■

15. Em $\mathbb{R}^2$ considere o ponto $P = (5, 6)$ e o vetor $\mathbf{w} = (3, 4)$. Determine a imagem do ponto e do vetor relativamente à base canónica e às transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a seguir definidas

    a) Reflexão em torno do eixo do x

    b) Reflexão em torno do eixo do y

    c) Reflexão em torno da reta $y = x$

    d) Reflexão em torno da reta $y = -x$

    e) Reflexão em torno da origem.

16. Em $\mathbb{R}^2$ considere o triângulo de vértices $P_1 = (-2, 0)$, $P_2 = (-3, 0)$ e $P_3 = (-2, -2)$. Determine a imagem do triângulo relativamente às transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a seguir definidas

    a) Reflexão em torno do eixo do x

    b) Reflexão em torno do eixo do y

    c) Reflexão em torno da reta $y = x$

    d) Reflexão em torno da reta $y = -x$

    e) Reflexão em torno da origem.

Resolução.

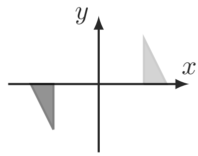
a) Representado por $\mathbf{T}_V^U$ a matriz de T relativamente á base canónica

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (-x,-y)$$

$$\begin{cases} T\,(1,0) = (-1,0) \\ T\,(0,1) = (0,-1) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{T}_V^U = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T\,(\mathbf{P}_U) = \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_U$$

$$\mathbf{P'}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{P'}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P'}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■

17. Em $\mathbb{R}^3$ considere o vetor $\mathbf{w} = (1,2,3)$. Determine a imagem do vetor relativamente às transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a seguir definidas

a) Reflexão em torno do eixo dos y

b) Reflexão em torno do plano xOy

c) Rotação de 45° em torno do eixo dos x

d) Rotação de 90° em torno do eixo dos z.

Resolução.

a) Representado por $\mathbf{T}_V^U$ a matriz de T relativamente á base canónica
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x,y,z) = (-x,y,-z)$

$$\begin{cases} T\,(1,0,0) = (-1,0,0) \\ T\,(0,1,0) = (0,1,0) \\ T\,(0,0,1) = (0,0,-1) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{T}_V^U = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T\,(\mathbf{w}_U) = \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_U$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

b) Representado por $\mathbf{T}_V^U$ a matriz de T relativamente á base canónica
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x,y,z) = (x,y,-z)$

31. Determine a matriz $\mathbf{A}$ sabendo que $\text{tr}(\mathbf{A}) = 2$, $\det(\mathbf{A}) = 0$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$ são vetores próprios de $\mathbf{A}$, $(1, 0)$ é o vetor próprio associado ao valor próprio de menor valor absoluto e que $\mathbf{A}$ admite dois valores próprios distintos.

Resolução.

Seja $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{A}) = 2 \\ \det(\mathbf{A}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 - \lambda_2 \\ \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

- Por definição, se $(1, 0)$ é um vetor próprio assiciado a $\lambda = 0$,então

  $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

  se $(1, 2)$ é um vetor próprio assiciado a $\lambda = 2$, então

  $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ c + 2d = 4 \end{cases}$$

  Logo, $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ a + 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1 \\ c + 2d = 4 \Leftrightarrow d = 2 \end{cases}$

  Pelo que, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

■

32. Seja T uma transformação linear, $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ e averigue se $(1, 1, 1)$ é um vetor próprio de T.

ÁLGEBRA MATRICIAL

Exercícios Propostos e Resolvidos

Ana C. Meira Castro
Ana Júlia Viamonte
António Varejão Sousa

Sobre a obra

Este livro pretende ser um complemento ao livro *Álgebra Matricial – Conceitos, Exercícios e Aplicações*. Os autores apresentam, nesta nova obra, uma resolução, tão simples quanto possível, dos exercícios propostos no livro suprarreferido.

No primeiro capítulo são apresentadas as propostas de resolução dos exercícios relativos a estruturas algébricas. No segundo, as relativas ao cálculo matricial, no terceiro, as relativas à resolução e discussão de sistemas de equações lineares com recurso ao cálculo matricial e, por fim, no quarto capítulo, as relativas a espaços vetoriais sobre um corpo e transformações lineares.

Este considerável conjunto de exercícios resolvidos seguramente beneficiará os alunos e todos aqueles que se debruçam sobre esta matéria, em particular quanto ao seu estudo concreto e prático.

Sobre os autores

Os autores são docentes no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP).

Ana C. Meira Castro é doutorada em Ciências de Engenharia e Investigadora no CERENA – Centro de Recursos Naturais e Ambiente, na área de geoambiente e análise de risco.

Ana Júlia Viamonte é doutorada em Ciências, área de Matemática e área específica de Álgebra Linear Numérica, e investigadora no LEMA – Laboratório de Engenharia Matemática do ISEP, na área de didática do ensino da matemática e álgebra linear numérica.

António Varejão Sousa é doutorado em Ciências de Engenharia e investigador no LEMA – Laboratório de Engenharia Matemática do ISEP, na área de processamento e análise de imagem.

Também disponível em formato *e-book*

ISBN: 978-989-901-777-1

9 789899 017771

www.**engebook**.pt

engebook