LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO TRIPLA

engebook

AUTOR
Luís António de Almeida Vieira

TÍTULO
Cálculo Integral – Integração Tripla

EDIÇÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA
Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO
Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

REVISÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

DESIGN DE CAPA
Luciano Carvalho
Delineatura, Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO
novembro, 2020

DEPÓSITO LEGAL
474267/20

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU

51	Matemática
517	Análise Matemática

ISBN

Papel:	9789899017399
E-book:	9789899017405

Catalogação da publicação

Família:	Bases de Engenharia
Subfamília:	Matemática

Conteúdo

A integração tripla é muita parecida à integração dupla. Os Teoremas e as propriedades relativos à integração tripla são do mesmo género que os Teoremas e as propriedades da integração dupla.

1.1 Integral triplo sobre um paralelepípedo

Vamos começar por definir o integral triplo de uma função ao longo de um paralelepípedo $\mathbb{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Nós dividimos os 3 lados do paralelepípedo em n partes iguais. Considerando os pontos $P_{ijk} = (x_i, y_j, z_k)$ tais que $x_i = a_1 + i\frac{b_1 - a_1}{n}, i = 0, 1, \cdots, n, y_j = a_2 + j\frac{b_2 - a_2}{n}, j = 0, 1, \cdots, n$ e $z_k = a_3 + k\frac{b_3 - a_3}{n}, k = 0, 1, \cdots, n$ obtemos a soma:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{j+1} - z_j) \quad (1.1)$$

onde $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_j, z_{j+1}]$ para $i = 0, 1, \cdots, n-1, j = 0, 1, \cdots, n-1$ e $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Se a função f for positiva podemos fazer a seguinte representação geométrica que se apresenta na figura 1.1.

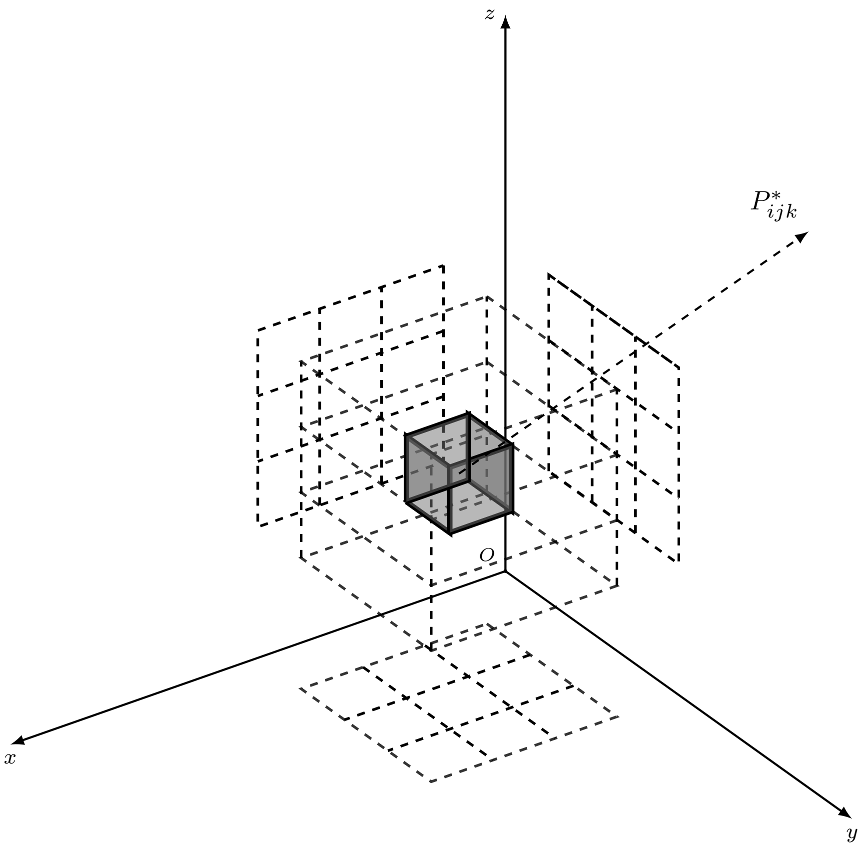

Figura 1.1: Soma $S_3 = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2} f(P^*_{ijk})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$.

b_3 *e* f *uma função contínua limitada definida no paralelepípedo* $\mathbb{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, *então* f *é integrável em* $\mathbb{P}$.

Observação 1.1.1. *Note-se que* $\int\int\int_{\mathbb{P}} 1dzdydx = Volume(\mathbb{P})$.

Observação 1.1.2. *Prova-se que se o conjunto* D *dos pontos de* $\mathbb{P}$ *onde* f *é descontinua estiver contido num conjunto de volume nulo, então* f *é integrável em* $\mathbb{P}$. *Por exemplo, se* D *estiver contido na interseção de* $\mathbb{P}$ *com uma união finita de gráficos de funções contínuas do tipo* $x = x(y,z), y = y(x,z)$ *ou* $z = z(x,y)$, *então* f *é integrável em* $\mathbb{P}$.

Teorema 1.1.2. *{Teorema de Fubini} Sejam* $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, *números reais com* $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ *e* $a_3 < b_3$ *e* f *integrável em* $\mathbb{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. *Então, qualquer integral iterado existe e é igual ao integral triplo de* f *em* $\mathbb{P}$, *isto é, tem-se:*

$$\begin{aligned}
\int\int\int_{\mathbb{P}} f(x,y,z)dV &= \int\int\int_{\mathbb{P}} f(x,y,z)dzdydx \\
&= \int\int\int_{\mathbb{P}} f(x,y,z)dzdxdy \\
&= \int\int\int_{\mathbb{P}} f(x,y,z)dydzdx \\
&= \int\int\int_{\mathbb{P}} f(x,y,z)dydxdz \\
&= \int\int\int_{\mathbb{P}} f(x,y,z)dxdzdy \\
&= \int\int\int_{\mathbb{P}} f(x,y,z)dxdydz.
\end{aligned}$$

Exercício 1.1.1. *Calcule o integral* $I = \int\int\int_{\mathbb{P}} xyz^2 dV$ *onde* $\mathbb{P} = [-1,1] \times [0,1] \times [1,2]$.

Resolução 1.1.1. *Vamos calcular o integral* I *na ordem de integração* $dxdydz$*. Assim, temos que:*

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 xyz^2 dxdydz &= \int_1^2 \left(\int_0^1 yz^2 \left(\int_{-1}^1 xdx \right) dy \right) dz = \\
= \int_1^2 \left(\int_0^1 yz^2 \frac{x^2}{2} |_{-1}^1 dy \right) dz &= \int_1^2 \left(\int_0^1 yz^2 \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) dy \right) dz \\
= \int_1^2 \left(\int_0^1 yz^2 0 dy \right) dx &= \int_1^2 0dx = 0.
\end{aligned}$$

Mas, se calculamos na ordem $dzdydx$ *o integral* I *então obtemos os seguintes cálculos:*

$$\begin{aligned}
\int_1^1 \int_0^1 \int_1^2 xyz^2 dzdydx &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(xy \frac{z^3}{3} \right) |_1^2 dydx \\
= \int_{-1}^1 \int_0^1 xy \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) dydx &= \int_{-1}^1 \int_0^1 xy \frac{7}{3} dydx \\
= \frac{7}{3} \int_{-1}^1 \int_0^1 xydydx &= \frac{7}{3} \int_{-1}^1 x \frac{y^2}{2} |_0^1 dx \\
= \frac{7}{3} \int_{-1}^1 x \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) dx &= \frac{7}{3} \int_{-1}^1 x \frac{1}{2} dx \\
= \frac{7}{3} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xdx &= \frac{7}{6} \frac{x^2}{2} |_{-1}^1 \\
= \frac{7}{6} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) &= \frac{7}{6} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

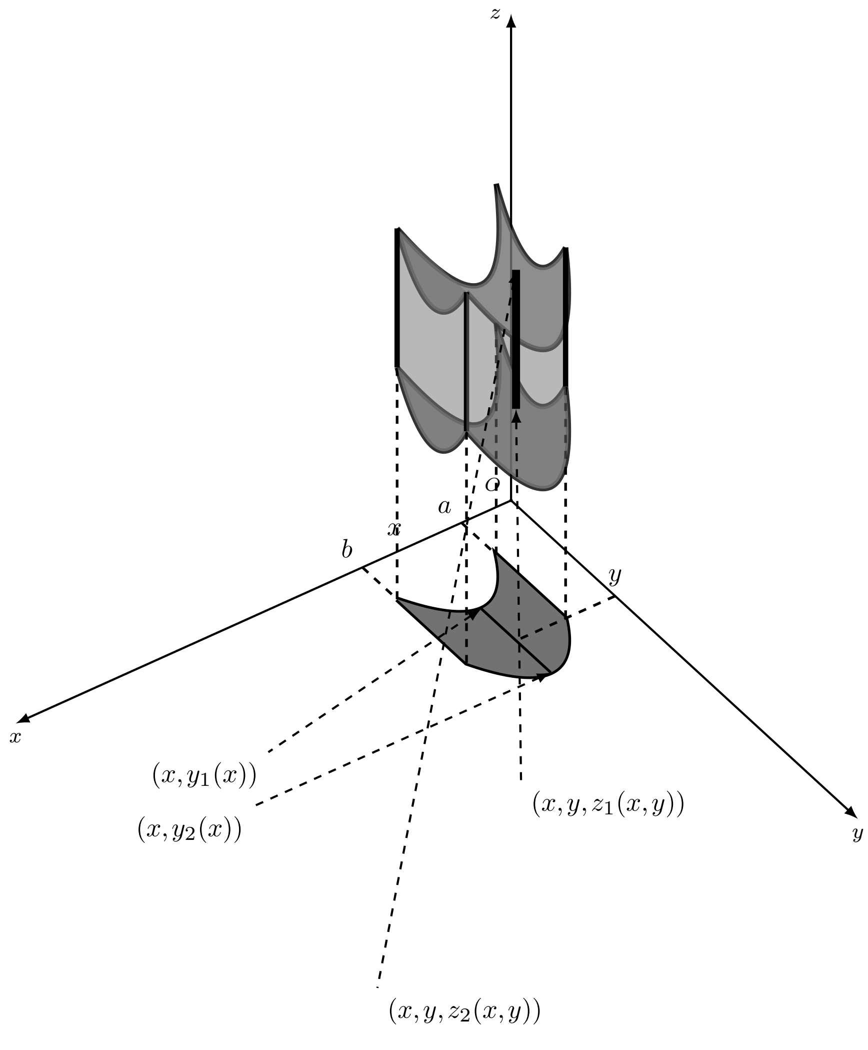

Figura 1.2: Região W do tipo 1.

Definição 1.2.2. *{Região do tipo 2} Diz-se que uma região W de $\mathbb{R}^3$ é uma região do tipo 2 se:*

$$W \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ((y,z) \in D) \wedge (x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z))\}$$

onde D é uma região elementar do plano Oyz e $x_1 : D \mapsto \mathbb{R}$, $x_2 : D \mapsto \mathbb{R}$ são funções contínuas em D, ou então funções cujos conjuntos dos seus pontos de descontinuidades são subconjuntos de área nula de D.

Exemplo 1.2.2. *Apresenta-se na figura 1.3. uma região do tipo 1.*

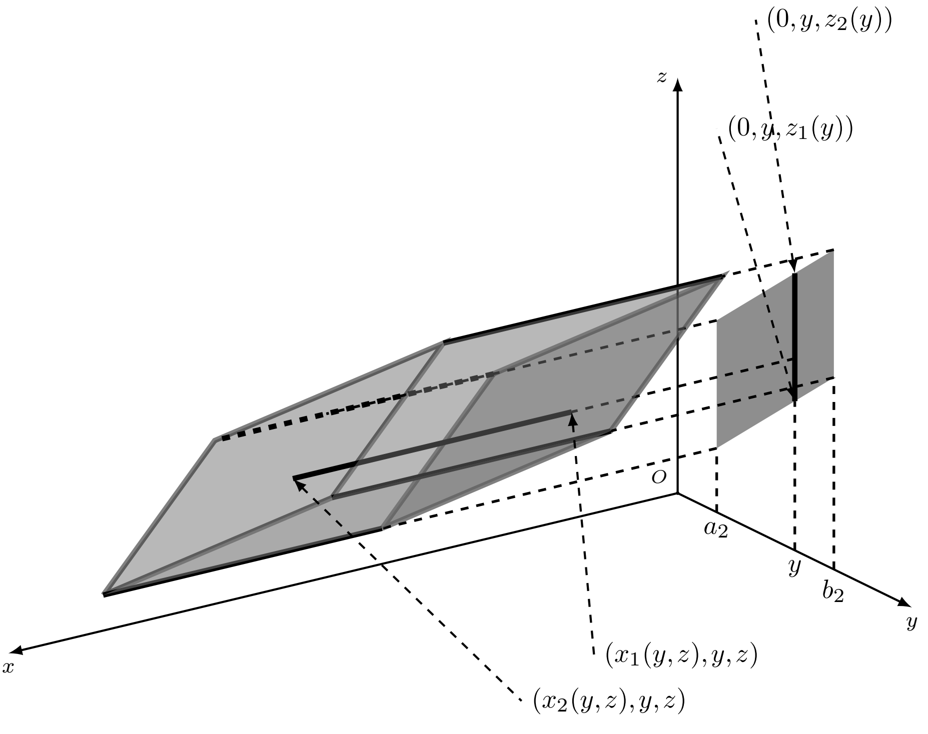

Figura 1.3: Região W do tipo 2.

Definição 1.2.3. *{Região do tipo 3} Diz-se que uma região W de $\mathbb{R}^3$ é uma região do tipo 3 se:*

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ((x,z) \in D) \wedge (y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z))\}.$$

onde D é uma região elementar do plano Oxz e $y_1 : D \mapsto \mathbb{R}$, $y_2 : D \mapsto \mathbb{R}$ são funções contínuas em D, ou então funções cujos conjuntos dos seus pontos de descontinuidades são subconjuntos de área nula de D.

Exemplo 1.2.3. *Apresenta-se na figura 1.4. uma região do tipo 3.*

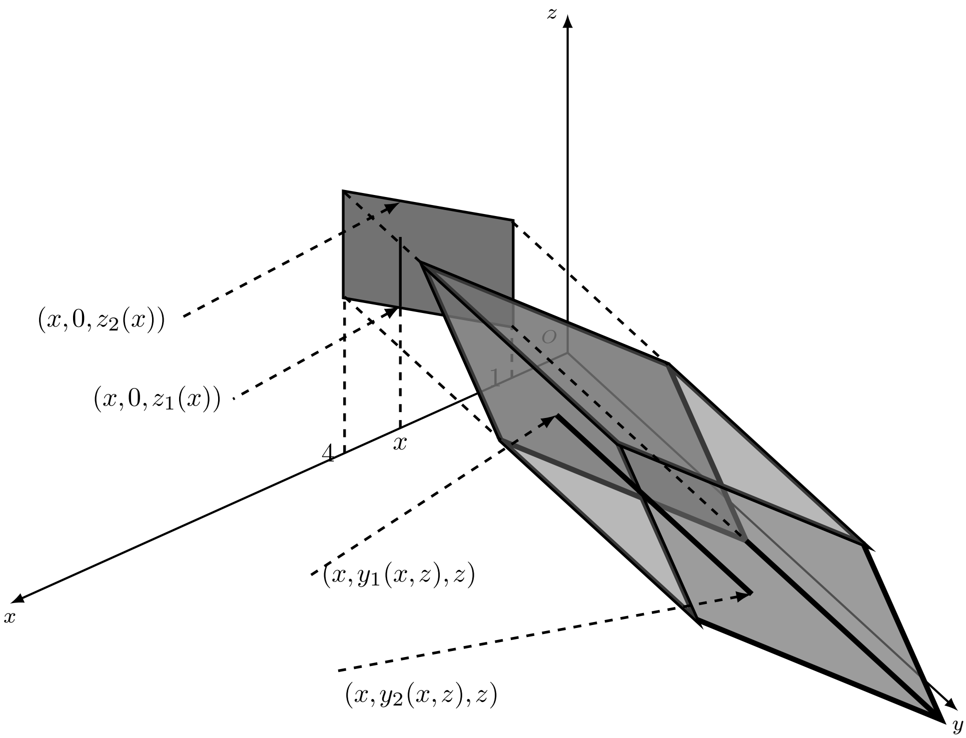

Figura 1.4: Região W do tipo 3.

Definição 1.2.4. *{Região do tipo 4} Uma região W de $\mathbb{R}^3$ é do tipo 4 se for uma região do tipo 1, do tipo 2 e do tipo 3.*

Exemplo 1.2.4. *Uma região W que é do tipo 4 é apresentada na figura 1.5.*

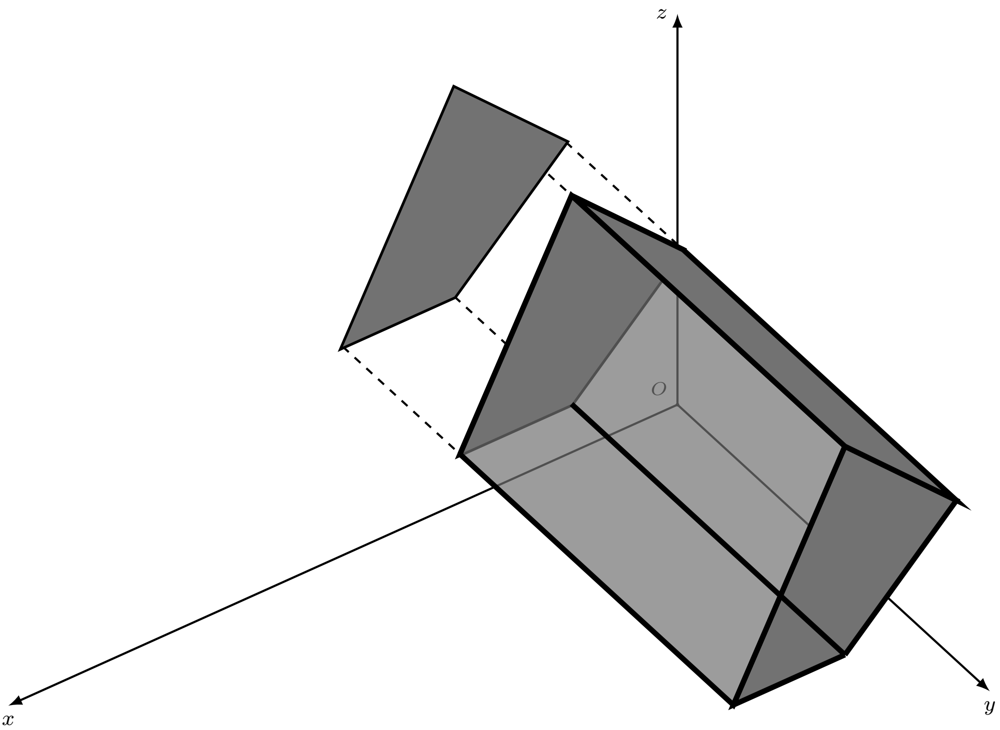

Figura 1.5: Região W do tipo 4.

Definição 1.2.5. *{Região elementar de $\mathbb{R}^3$} Diz-se que uma região W de $\mathbb{R}^3$ é uma região elementar de $\mathbb{R}^3$ se for uma região do tipo 1, ou do tipo 2, ou do tipo 3 ou do tipo 4.*

Definição 1.2.6. *Seja W uma região elementar de $\mathbb{R}^3$, $f : W \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função*

Exemplo 1.5.5. *Calcule o volume do elipsóide* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\}$, *utilizando a mudança de coordenadas:*

$$\begin{aligned} T(\rho,\theta,\phi) &= (x(\rho,\theta,\phi), y(\rho,\theta,\phi), z(\rho,\theta,\phi)) \\ &= (\rho sen(\phi)\cos(\theta), 2\rho sen(\phi) sen(\theta), 3\rho\cos(\phi)) \end{aligned}$$

Apresenta-se de seguida um esboço do elipsóide na figura 1.11.

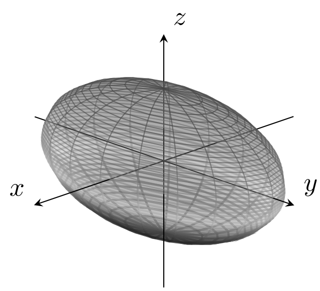

Figura 1.11: Elipsóide.

Após alguns cálculos concluímos que:

$$\left|\frac{\partial(\rho,\theta,\phi)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{matrix} \right\| = 6\rho^2 sen(\phi)$$

Neste capítulo vamos apresentar exercícios resolvidos sobre integrais triplos, envolvendo o cálculo de volumes de regiões de $\mathbb{R}^3$, cálculo de integrais triplos de funções contínuas. Apresentam-se ainda exercícios resolvidos sobre o cálculo do centro de massa de uma região elementar de $\mathbb{R}^3$ e os momentos de inércia relativamente aos eixos coordenados quando $\mathbb{R}^3$ está munido de uma função densidade pontual. Na resolução de cada exercício apresenta-se uma figura 3-D para tornar mais explicita a resolução de cada exercício.

2.1 Exercícios resolvidos

Exercício 2.1.1. *Calcule o volume da região* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 3) \wedge (0 \leq y \leq 3) \wedge (0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2})\}$.

Observação 2.1.1. *Apresenta-se na figura 2.1. a região* Ω.

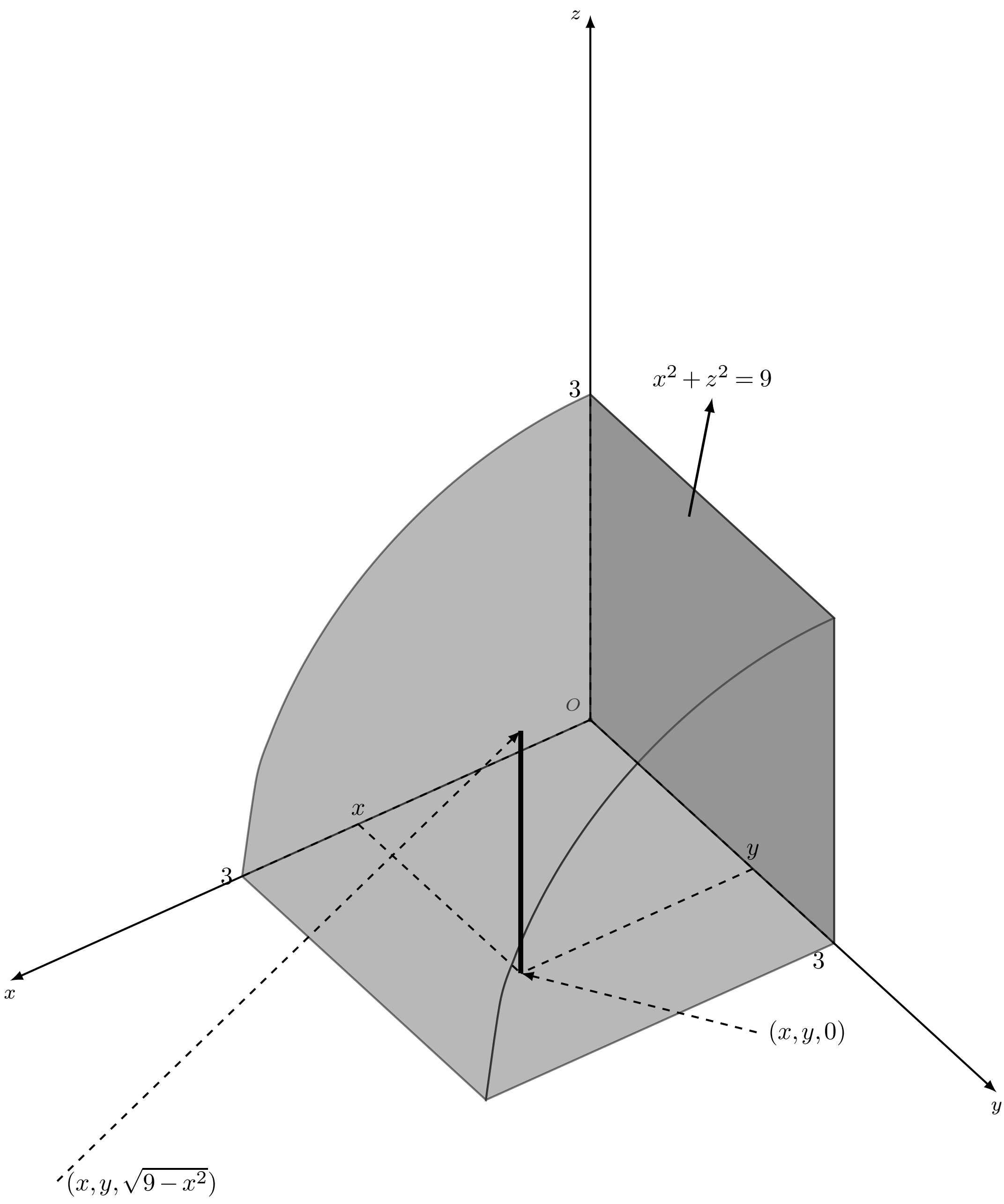

Figura 2.1: Região Ω of $\mathbb{R}^3$.

Resolução 2.1.1. *Tem-se analisando a figura 2.1.*

$$\begin{aligned}
Volume(\Omega) &= \int_0^3\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} 1dzdxdy = \int_0^3\int_0^3 z|_0^{\sqrt{9-x^2}}dxdy \\
&= \int_0^3\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dxdy = \int_0^3 \frac{9\pi}{4}dy \\
&= \frac{9\pi}{4}\int_0^3 dy = \frac{9\pi}{4}y|_0^3 \\
&= \frac{9\pi}{4}(3-0) = \frac{27\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exercício 2.1.2. *Obtenha o valor do integral* I *tal que* $I = \int\int\int_D xdzdydx$, *onde* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 1-x) \wedge (0 \leq z \leq 1-x-y)\}$ *e está representado na figura 2.2.*

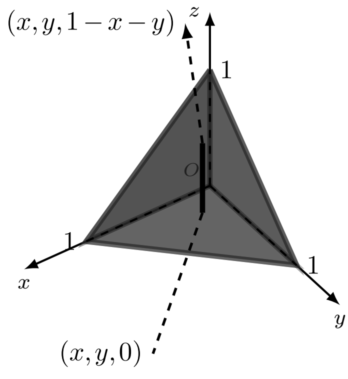

Figura 2.2: Sólido D de $\mathbb{R}^3$.

Resolução 2.1.2. *Facilmente vemos que a projeção da região* D *no plano* Oxy *é o triângulo representado na figura 2.3.*

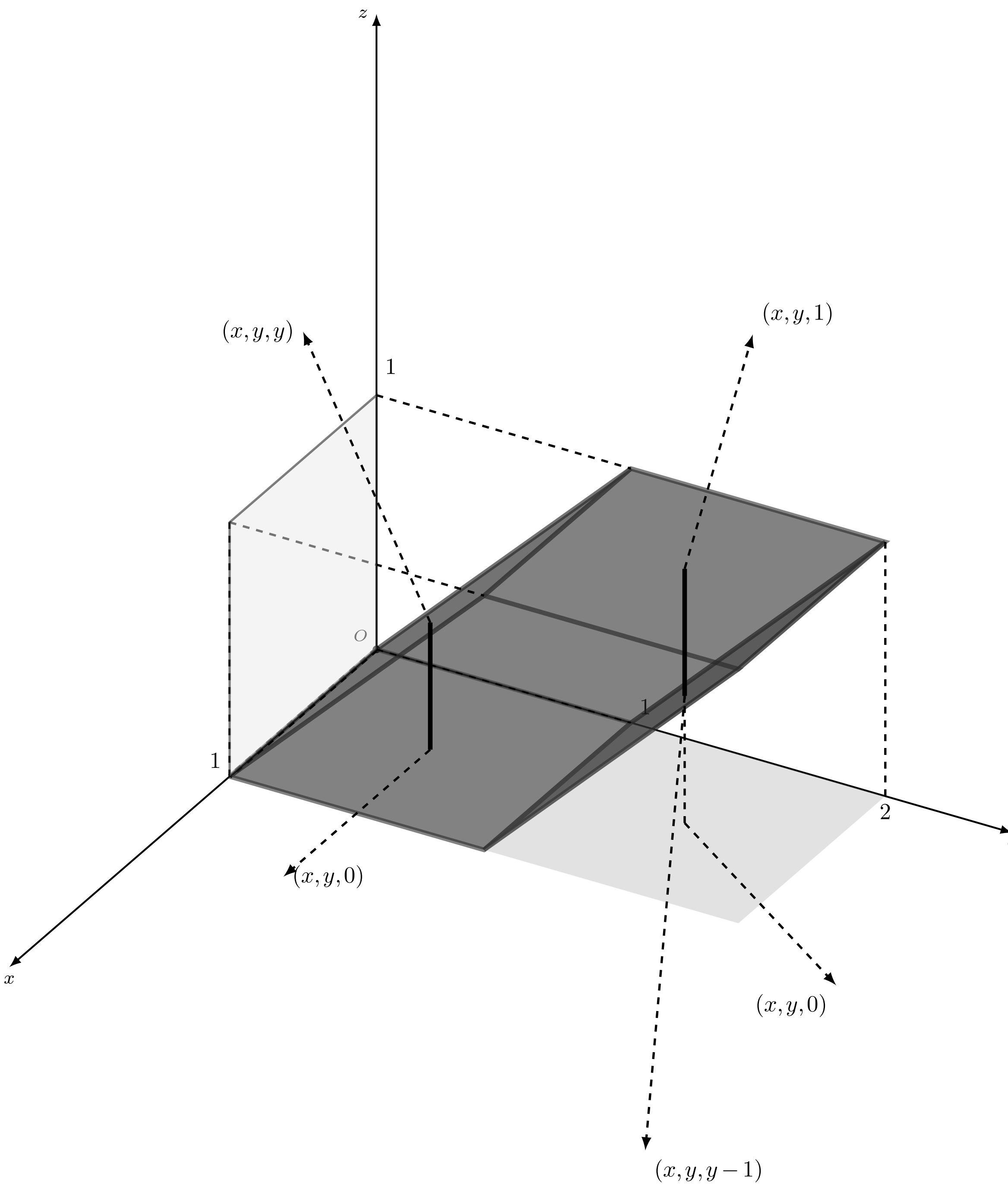

Figura 2.5: Sólido D de $\mathbb{R}^3$.

b) Considere-se a figura 2.19.

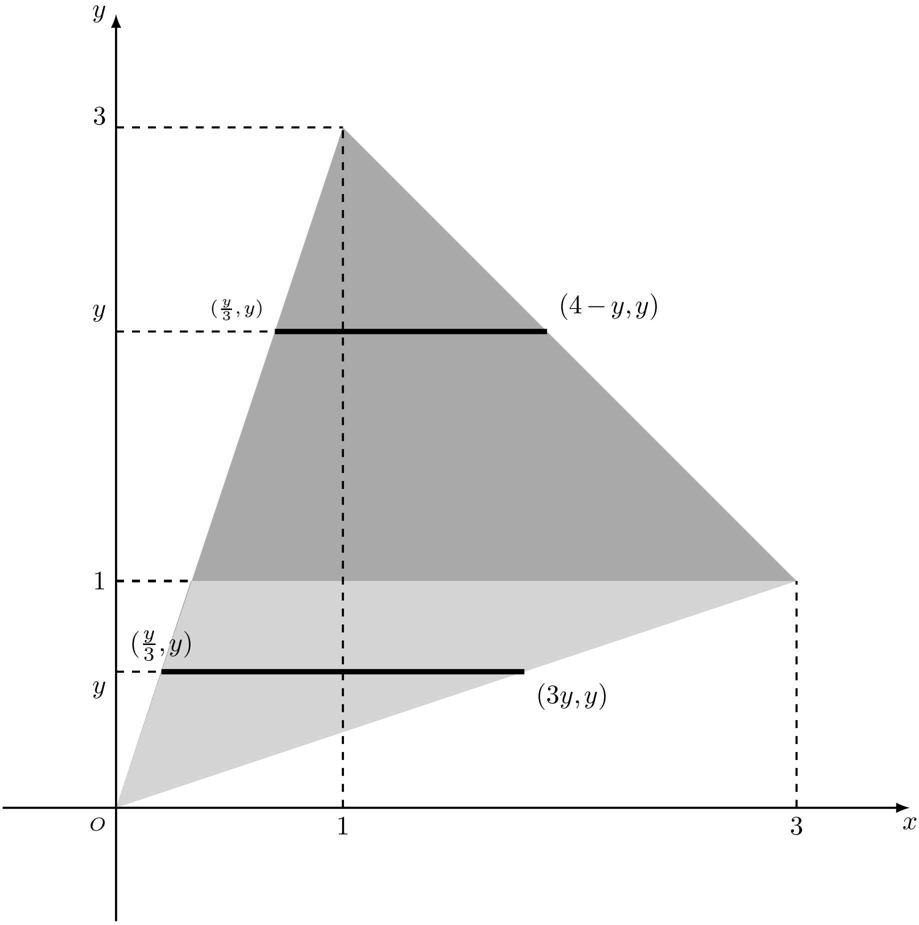

Figura 2.19: Projeção da região W no plano Oxy.

Logo:

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{y}{3}}^{3y} \int_0^1 (y-2x)\,dz\,dx\,dy + \int_1^3 \int_{\frac{y}{3}}^{4-y} \int_0^1 (y-2x)\,dz\,dx\,dy.$$

c) Considere-se o esboço da projeção da região W no plano Oyz na figura 2.20.

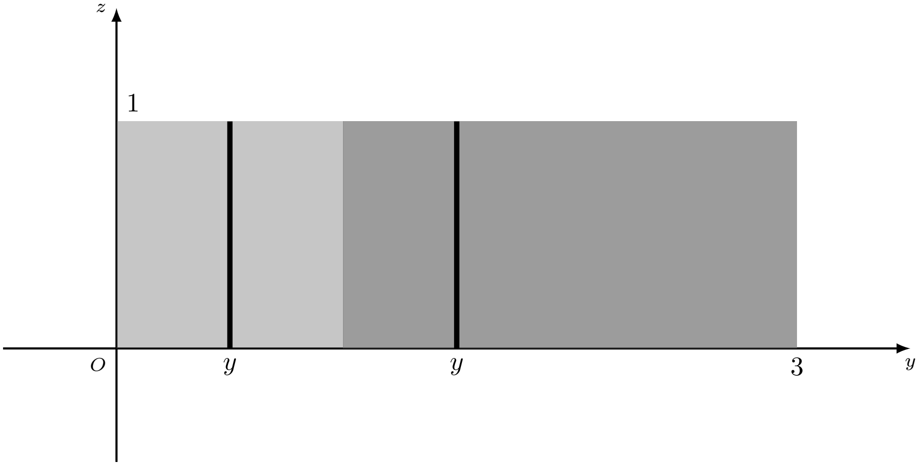

Figura 2.20: Projeção no plano Oyz.

Assim, analisando a figura 2.21.

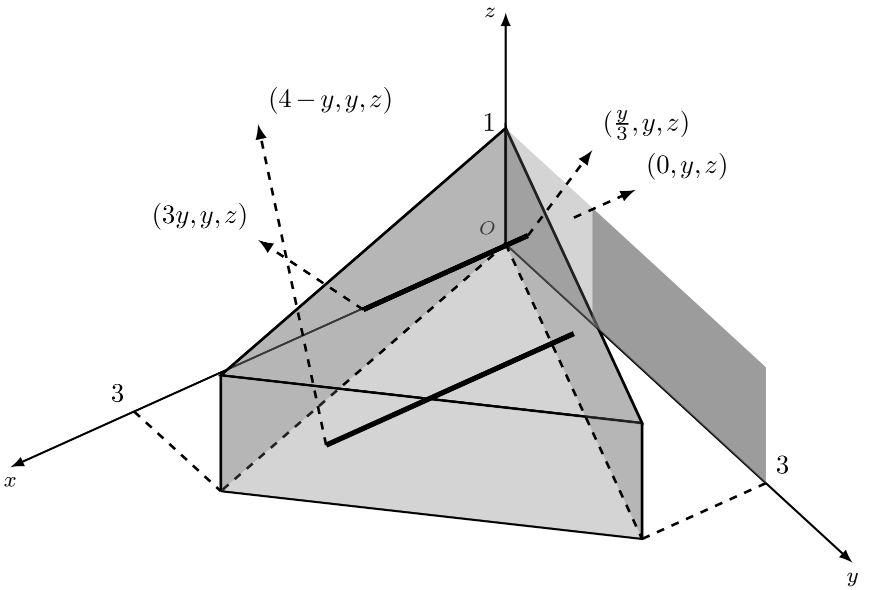

Figura 2.21: Região W.

b) Apresenta-se na figura 2.28. a região $\mathbb{R}$.

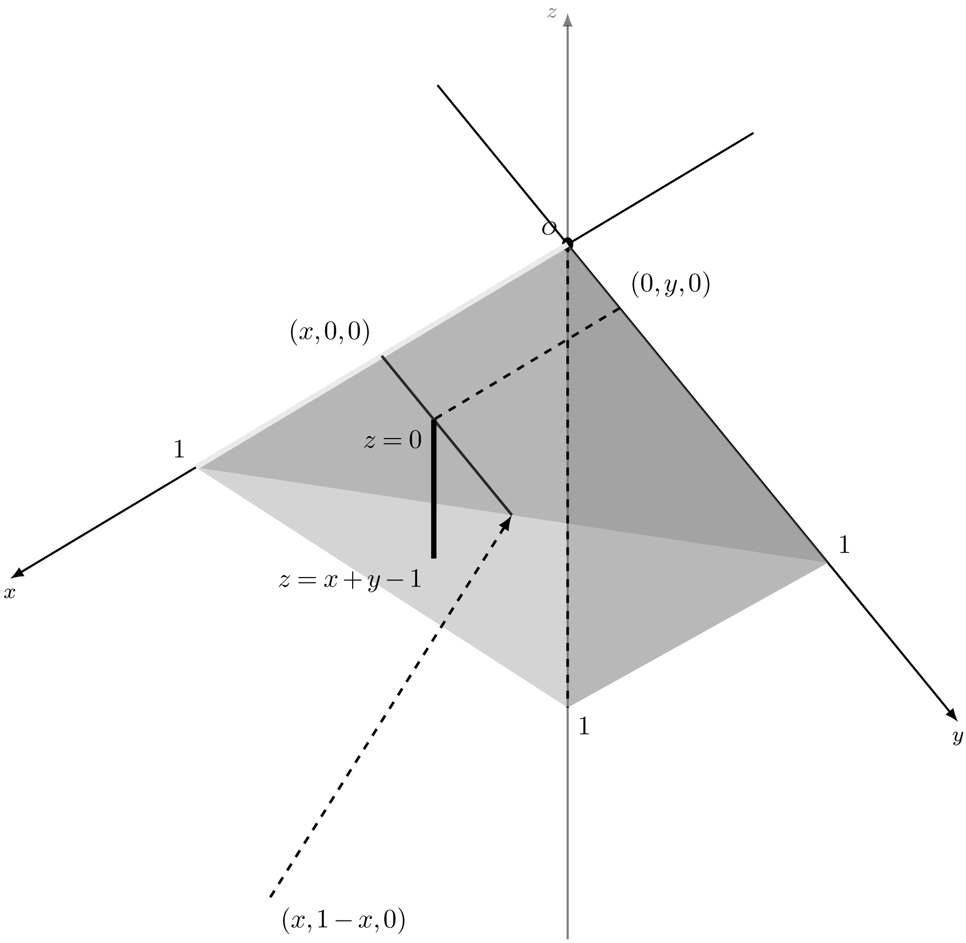

Figura 2.28: Região $\mathbb{R}$.

Este exercício é um bom exercício para explicar o cálculo de um integral utilizando coordenadas cartesianas. Vamos passar a descrever como é que se integra triplamente. Assim, devemos em primeiro lugar decidir em que plano é que projetamos a região R. Neste caso optamos por projetar o sólido R no plano **Oxy** *segundo a direção do eixo Oz. Mas então para cada ponto $(x,y,0)$ da projeção*

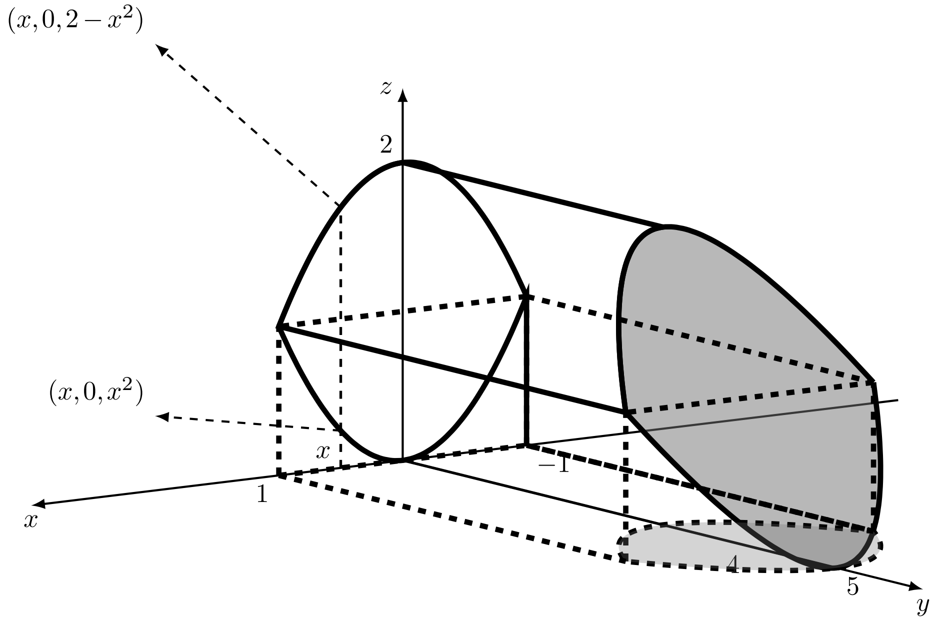

Figura 2.41: Região W.

Assim, traçando retas verticais ao plano Oxy passando por um ponto $(x, y, 0)$ *intersetamos a região* W *de uma forma diferente conforme o ponto pertence à região da projeção de* W *não sombreada ou pertence à região sombreada. Então devemos partir o integral em dois integrais triplos - um cuja região de integração projetada no plano Oxy cai na região não sombreada da projeção e outro em que a região de integração de* I *cai na região sombreada da projeção. Assim, para determinar os dois primeiros índices dos integrais da alínea b) considere-se a figura 2.42.*

3.1 Exercícios Propostos

Exercício 3.1.1. *Desenhe o sólido:*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 2) \wedge \wedge (x \leq y \leq 2) \wedge (0 \leq z \leq 2-y)\}.$$

Exercício 3.1.2. *Desenhe o sólido S tal que:*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 2) \wedge (0 \leq z \leq 4-x^2) \wedge (0 \leq y \leq 8)\}.$$

Exercício 3.1.3. *Descreva por compreensão o sólido S representado na figura 3.1.*

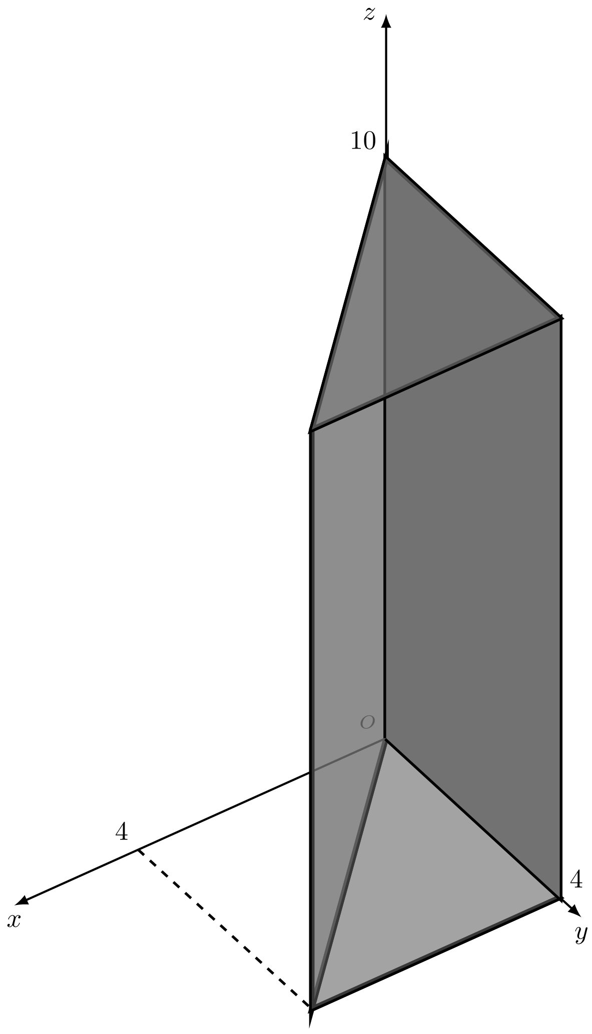

Figura 3.1: Sólido S.

Exercício 3.1.4. *Esboce a região de integração de cada um dos seguintes inte-*

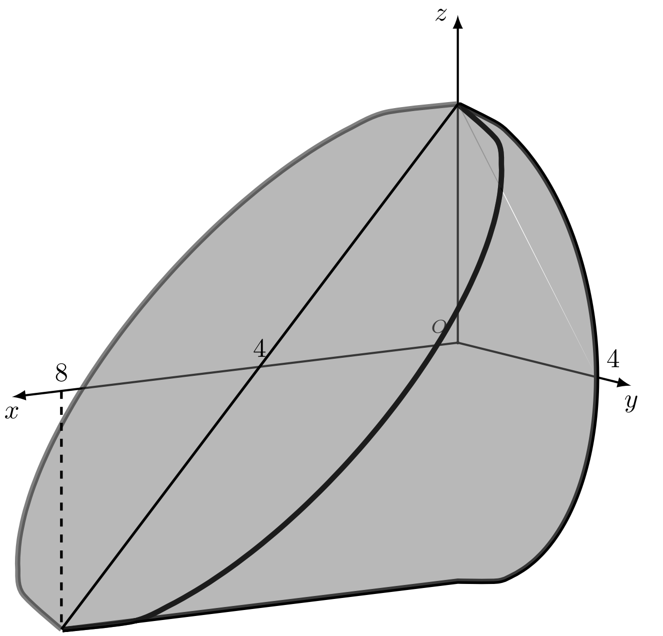

Figura 3.6: Região D.

- Exercício 3.1.5.

a) $I = \int_0^6 \int_0^1 \int_{1-z}^{1+z} dxdzdy.$

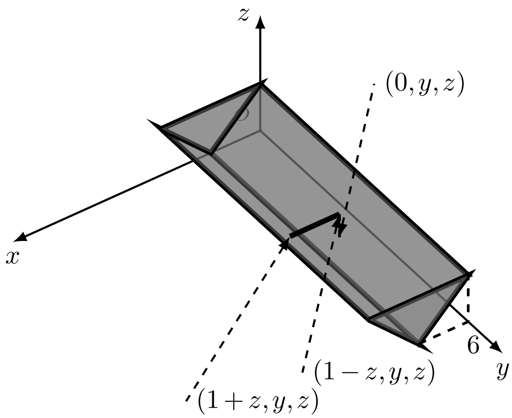

Figura 3.7: Região de integração de I.

CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO TRIPLA

LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

Sobre a obra

Este é o terceiro livro do autor no âmbito do Cálculo Integral, constituindo uma obra cujos objetivos principais são contribuir para que as matérias lecionadas nas disciplinas de Matemática se tornem mais atrativas e demonstrar ao leitor a necessidade da Matemática no desenvolvimento científico dos alunos de Engenharia. Em particular, neste caso, sobre a temática dos Integrais Triplos.

Neste livro pretende-se apresentá-la de um modo apelativo e baseado em exercícios e exemplos, apresentando desse modo os conceitos necessários para o encadeamento da matéria, que conta neste âmbito com figuras com objetivos pedagógicos no âmbito da Integração Tripla.

Este livro consiste assim numa primeira parte com alguma teoria sobre a matéria, e depois são expostos problemas e exercícios, com propostas de resolução.

Sobre o autor

Luís António de Almeida Vieira
Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil, licenciou-se em Matemática Aplicada no Ramo Científico na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 1985, tendo obtido o grau de Doutor em Matemática pela Universidade de Aveiro em 2004.

Começou, a partir de 1985, por ser Professor na Escola Secundária Clara Resende, lecionando Matemática. Continua a sua carreira como Professor de Matemática no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, onde leciona as aulas teóricas das unidades curriculares de Análise Matemática I, Análise Matemática II, Análise Matemática VI, Introdução à Topologia, Introdução à Lógica, Álgebra Linear, e as aulas práticas das unidades curriculares de Investigação Operacional e de Análise Numérica. Em 1990, inicia a sua carreira como Professor no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, na Secção de Matemática, onde assume as regências das unidades de Análise Matemática I, Análise Matemática II e Álgebra Linear, e leciona as aulas práticas destas unidades e da unidade de Estatística.

Ao longo da sua carreira letiva produziu várias monografias sobre Álgebra de Jordan. Na vertente de investigação publica artigos em que pretende estabelecer uma interligação entre análise, álgebra e combinatória.

Pertence atualmente ao Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP).

Também disponível em formato *e-book*

ISBN: 978-989-901-739-9

9 789899 017399

www.engebook.pt

engebook