LUÍSA MADUREIRA

Problemas de Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace

5.ª Edição
REVISTA E AUMENTADA

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f($$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)$$

engebook

AUTORA
Luísa Madureira

TÍTULO
Problemas de Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace – 5.ª Edição

EDIÇÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO
Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt

CHANCELA
Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO
Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

DESIGN
Luciano Carvalho
Delineatura – Design de Comunicação · www.delineatura.pt

IMPRESSÃO
Fevereiro, 2020

DEPÓSITO LEGAL
456689/19

A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2020 | Todos os direitos reservados a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, e ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU

51	Matemática
517	Análise Matemática
517.9	Equações diferenciais. Equações integrais. Outras equações funcionais. Diferenças finitas. Cálculo de variações. Análise funcional

ISBN

Papel:	9789898927583
Ebook:	9789898927590

Catalogação da publicação

Família:	Bases de Engenharia
Subfamília:	Matemática

ÍNDICE

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR À PRIMEIRA

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

CAPÍTULO 4

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

CAPÍTULO 5

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais constituem um ramo de grande importância na matemática moderna. Há inúmeros fenómenos no meio que nos rodeia cuja interpretação pode ser traduzida por modelos matemáticos baseados em equações diferenciais. Na área da engenharia, a cujos alunos este texto se dirige, podem mencionar-se como exemplos destes fenómenos a distribuição de temperatura num sólido aquecido de modo não uniforme ou uma viga deformada sob a ação de um sistema de forças ou ainda um modelo de suspensão automóvel.

Mas o que é afinal uma equação diferencial? É uma equação envolvendo derivadas de uma ou mais funções com respeito a uma ou mais variáveis independentes. Nesta obra cujo objetivo é apresentar problemas sendo alguns resolvidos, serão apenas estudados exemplos de equações diferenciais ordinárias, isto é, equações envolvendo funções e as suas derivadas em ordem a uma só variável independente que são representadas por

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0$$

sendo x a variável independente e y a variável dependente.

A ordem da equação diferencial é a ordem mais elevada das derivadas da variável dependente presentes na equação. São assim equações de primeira ordem as equações do tipo

$$F\left(x, y, y'\right) = 0$$

que serão tratadas no primeiro capítulo onde se apresentam diversos métodos de integração para este tipo de equações.

As equações de segunda ordem são do tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

e serão tratadas no capítulo 2 onde se referem as equações diferenciais de ordem n. São estudadas em particular as equações lineares que são equações diferenciais lineares em y e nas suas derivadas do tipo

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

Por serem as mais frequentes nos fenómenos físicos é dado especial ênfase neste capítulo 2 às equações de segunda ordem, sendo apresentado um método de resolução em que a solução é representada por uma ou mais séries de potências. Um exemplo importante destas equações que será estudado é o da equação de Bessel.

No terceiro capítulo é estudado um método de resolução de sistemas de equações diferenciais lineares, isto é, um conjunto de equações simultâneas e finalmente no capítulo quatro é introduzido o conceito de transformada de Laplace que é particularmente útil na resolução de problemas de valor inicial, ou seja, uma ou mais equações diferenciais de ordem n com n condições iniciais

$$y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1, \quad y''(x_0) = k_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

É neste caso que são incluídas as funções com descontinuidades, nomeadamente a Função de Heaviside e a função impulso.

No capítulo 5 é apresentado um método numérico para determinação de soluções em que se discretiza o domínio. A solução é apresentada em valor aproximado em n pontos do domínio previamente escolhidos.

CAPÍTULO 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste primeiro capítulo são estudadas equações diferenciais de primeira ordem contendo a primeira derivada da função y e que são representadas por

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

A equação (1) pode apresentar a derivada explícita ou implícita, sendo que o primeiro caso é estudado nas secções 1.1 a 1.5. Ao longo do capítulo são estabelecidos processos de integração para determinados tipos de equações diferenciais. A última secção deste capítulo, secção 1.6, aborda algumas equações não resolvidas em ordem à derivada.

1.1. Equações diferenciais de variáveis separáveis

Uma equação diferencial de variáveis separáveis é uma equação do tipo

$$g(y)y' = f(x) \tag{2}$$

que pode ser escrita na forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Uma equação diferencial homogénea é do tipo

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

em que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogéneas do mesmo grau *n*.

Neste caso a substituição $y = ux$ transforma a equação (6) numa equação de variáveis separáveis em u e x. Analogamente, a substituição $x = vy$ transforma a equação (6) numa equação de variáveis separáveis em v e y.

Se a equação (6) for escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{7}$$

pode-se substituir x por λx e y por λy, se $\lambda>0$. Tomando para λ o valor $\frac{1}{x}$ se x positivo ou $-\frac{1}{x}$ se x negativo, tem-se

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)} = \begin{cases} \dfrac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)}, x > 0 \\ \dfrac{M(-1,-y/x)}{N(-1,-y/x)}, x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Assim, verifica-se que o resultado se pode escrever como uma função de $\frac{y}{x}$ e portanto a equação diferencial (7) pode ser escrita na forma

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9}$$

o que permite concluir que se a equação diferencial $y' = F(x,y)$ é tal que

$$F(\lambda x,\lambda y) = F(x,y) \tag{10}$$

então ela é homogénea.

Teorema

Se a equação diferencial $y' = F(x,y)$ é homogénea então a mudança de variável $y = ux$ transforma esta equação numa equação diferencial em u, de variáveis separáveis.

Resolução

A família dada é uma família de circunferências com centros no eixo *Ox* e tangentes ao eixo *Oy* (Fig. 1.1.).

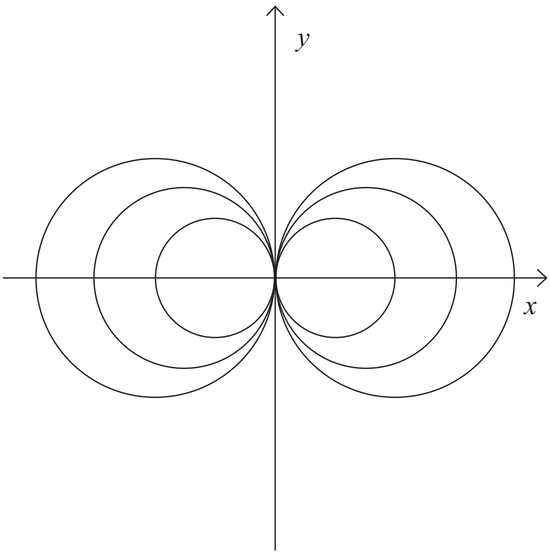


Figura 1.1.

A equação diferencial que as caracteriza é obtida por derivação de ambos os membros da equação. Obtém-se então

$$2x + 2yy' = 2a$$

Substituindo o valor de a que se obtém da equação inicial

$$a = \frac{x^2 + y^2}{2x}$$

e resolvendo em ordem a y' tem-se

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Então a equação diferencial das trajetórias ortogonais é tal que $y'_{\text{ort}} = -\dfrac{1}{y'}$

$$y'_{\text{ort}} = -\frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

que é homogénea. A sua solução é

$$x^2 + y^2 = Cy\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

que é a família de circunferências de centros no eixo Oy e tangentes ao eixo Ox que se pode ver representada na Figura 1.2.

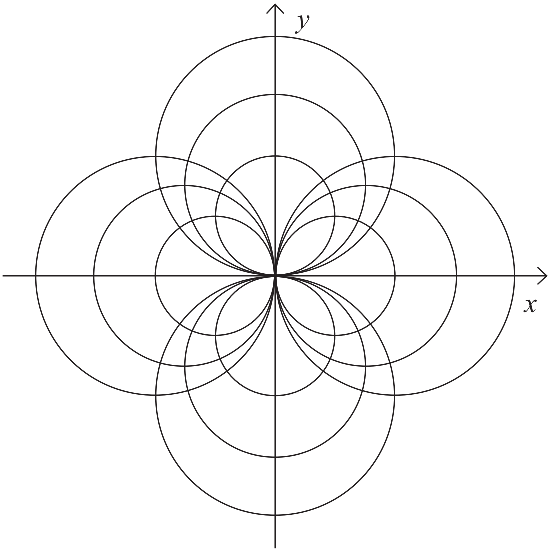


Figura 1.2.

Problema 1.31.

Determinar as trajetórias ortogonais à família de parábolas $x = ay^2$.

Resolução

Derivando ambos os membros da equação em ordem a x tem-se

$$1 = 2ayy'$$

e eliminando o parâmetro a

$$a = \frac{x}{y^2}$$

obtém-se

$$y' = \frac{y}{2x}$$

Substituindo y' por $-\frac{1}{y'}$ obtém-se a equação diferencial das trajetórias ortogonais

$$y' = -\frac{2x}{y}$$

que é uma equação de variáveis separáveis. Integrando conduz a

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C,\ C \in \mathbb{R}$$

que é uma família de elipses (Fig. 1.3.).

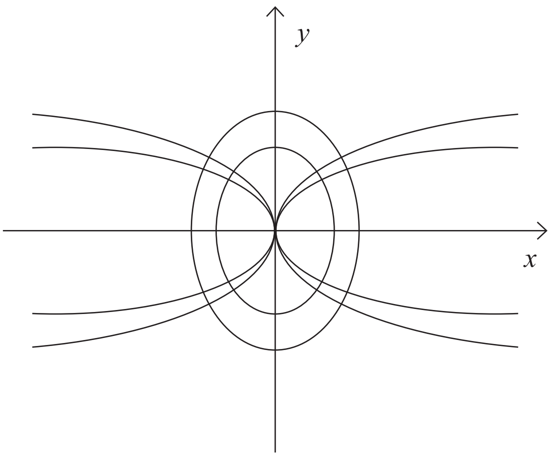


Figura 1.3.

Problemas

Determinar a equação das trajetórias ortogonais às seguintes famílias de curvas:

1.32. $y^2 + 2ax = 0, \quad a > 0$

1.33. $y = ax^n$

1.34. $x^k + y^k = a^k$

1.50. $4\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,3y\cos x dx = 3\cos 3y\cos 2x dy$

1.51. $\left(3x^2y + 8xy^2\right)dx + \left(x^3 + 8x^2y + 12ye^y\right)dy = 0$

Soluções

1.41. $\dfrac{x}{y} = C$

1.42. $\dfrac{-y}{x+y} + \ln|x+y| = C$

1.43. $\dfrac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$

1.44. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$

1.45. $\dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$

1.46. $x^4/4 - 3/2x^2y^2 + 2x + y^3/3 = C$

1.47. $x^2 + y^2 - 2\,\text{arctg}(y/x) = C$

1.48. $\dfrac{x^2}{y^3} + \ln|y| = C$

1.49. $\dfrac{x^3}{3} - xy - \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4}\text{sen}\,2y = C$

1.50. $\cos 2x\ \text{sen} 3y = C$

1.51. $x^3y + 4x^2y^2 - 12e^y + 12ye^y = C$

1.4.1. Fator integrante

Se a equação (25) não for uma equação diferencial exata é possível em certos casos transformá-la numa equação exata multiplicando-a por uma função particular.

Uma função $\mu(x, y)$ é um fator integrante da equação não exata se multiplicando a equação por esta função

$$\mu(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = 0 \tag{33}$$

$C(x) = -x\cos x + \operatorname{sen} x + \overline{C}$

Finalmente a solução é

$$y = C\frac{x+1}{x} - (x+1)\cos x + \frac{x+1}{x}\operatorname{sen} x\,,\ C \in \mathbb{R}$$

Problemas

1.64.

Resolver as seguintes equações diferenciais tendo em conta as condições iniciais dadas:

a) $y' - 3y = e^{2x}, \quad y = 0 \ \text{ para } \ x = 0 \ \text{ e } \ x \in \left]-\infty, +\infty\right[$

b) $xy' - 2y = x^5, \quad y = 1 \ \text{ para } \ x = 1 \ \text{ e } \ x \in \left]0, +\infty\right[$

c) $\dfrac{dx}{dt} + x = e^{2t}, \quad x = 1 \ \text{ para } \ t = 0 \ \text{ e } \ t \in \left]-\infty, +\infty\right[$

d) $y' + xy = x^3, \quad y = 0 \ \text{ para } \ x = 0 \ \text{ e } \ x \in \left]-\infty, +\infty\right[$

e) $xy' + 2y = 4e^{x^2}$

1.65.

O gráfico de uma função $f(x)$ passa por $P_0 \equiv (0,\ 1)$ e $P_1 \equiv (1,\ 0)$. Para todo o ponto arbitrário da curva, $P(x,\ y)$, a curva está situada por cima da corda $\overline{P_0P}$, e a área $A(x)$ da região compreendida entre a curva e a corda $\overline{P_0P}$ é igual a x^3.
Determine a função $f(x)$.

1.66.

Determinar a solução geral da equação $y'\operatorname{sen} x + y\cos x = 1 \quad \text{para} \quad x \in \left]0, \pi\right[$.
Resolver as seguintes equações diferenciais:

1.67. $xy' + 2(1 - x^2)y = 1$

1.68. $y' + y\operatorname{cotg} x = \operatorname{sen} 2x$

1.69. $(1 - x^2)y' + xy = 2x$

1.87. $y = -1$

1.88. $y^{\frac{2}{3}} = x\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)$

1.5.2. Equação de Riccati

A equação de Riccati é do tipo

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{61}$$

com $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ contínuas num domínio D. Para esta equação não é possível descrever um método de calcular a sua solução geral. No entanto, no caso de ser conhecida uma solução particular, a integração da equação já é possível por um processo simples.

Teorema

Considere-se a equação de Riccati (61). No caso de ser conhecida uma solução particular $u(x)$ a mudança de variável

$$y = u(x) + \frac{1}{z} \tag{62}$$

transforma a equação numa equação diferencial linear de primeira ordem em z e x, sendo z a nova variável dependente.

Demonstração

Considere-se a mudança de variável $y = u(x) + \frac{1}{z}$. Então

$$y' = u'(x) - \frac{1}{z^2}z' \tag{63}$$

Substituindo em (61) obtém-se

$$u'(x) - \frac{1}{z^2}z' + P(x)\left(u(x) + \frac{1}{z}\right) + Q(x)\left(u(x) + \frac{1}{z}\right)^2 = R(x) \tag{64}$$

1.96. $y = \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{C\cos x - \operatorname{sen} x}$; $y = \operatorname{sen} x$

1.97. $y = \dfrac{Ce^{3x^2} - 1 + 6x}{Cxe^{3x^2} - x}$; $y = \dfrac{1}{x}$

1.98. $y = \dfrac{Cx^{1-a} + a}{x\left(Cx^{1-a} + 1\right)}$; $y = \dfrac{1}{x}$

1.6. Equações não resolvidas em ordem à derivada

Considere-se a equação diferencial

$$f(x, y, y') = 0 \tag{68}$$

Supondo que não é possível resolvê-la em ordem à derivada e tomando

$$y' = p \tag{69}$$

tem-se

$$f(x, y, p) = 0 \tag{70}$$

e derivando em ordem a x obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = 0 \tag{71}$$

Eliminando x e dx usando as equações (69) e (70) obtém-se a nova equação diferencial

$$f(y, p, dy, dp) = 0 \tag{72}$$

ou em alternativa, eliminando y e dy

$$f(x, p, dx, dp) = 0 \tag{73}$$

o que integrando conduz a

$$F_1(y, p) = C \tag{74}$$

Tomando $y' = p$ a equação escreve-se

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \tag{78}$$

e derivando em ordem a x obtém-se

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \tag{79}$$

Resolvendo em ordem a $\frac{dx}{dp}$ tem-se

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{80}$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem em x com p como variável independente. Integrando esta equação e eliminando p obtém-se o integral geral.

Problema 1.107.

Resolver a equação diferencial $y = x(1 + y') + y'^2$.

> ### Resolução
> Tomando $y' = p$ a equação escreve-se
>
> $$y = x(1 + p) + p^2$$
>
> e derivando em ordem a x tem-se
>
> $$p = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$
>
> que é equivalente à equação diferencial linear de primeira ordem
>
> $$\frac{dx}{dp} + x = -2p$$
>
> A integração desta equação conduz à solução
>
> $$x = Ce^{-p} + 2(1 - p)$$

e como $y_1, y_2, \ldots, y_m$ são soluções de (13) pode confirmar-se que esta soma se anula e portanto a equação é verificada pela solução $z(x)$ que é a combinação linear de $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

■

Teorema

O espaço de soluções da equação homogénea (13) é um espaço de dimensão *n*, isto é, se a equação é de ordem *n* há *n* soluções linearmente independentes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e qualquer solução particular da equação (13) pode ser expressa como combinação linear dessas *n* soluções linearmente independentes. Então a solução geral de (13) é dada por

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \tag{17}$$

Um processo de determinar a independência linear de *n* funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ é através do cálculo do seguinte determinante designado por Wronskiano

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Teorema

O Wronskiano de *n* soluções da equação diferencial linear homogénea (13) é ou nulo em todos os pontos ou nunca se anula em nenhum ponto. Quaisquer soluções de (13) são linearmente independentes se e só se o Wronskiano é diferente de zero em todos os pontos do domínio.

Considere-se agora a equação não homogénea (12).

Teorema

Se $Y(x)$ é uma solução particular da equação (12) e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são *n* soluções linearmente independentes da equação homogénea associada (13) então a solução geral da equação não homogénea é

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + Y(x) \tag{19}$$

2.25. $y''' - y'' + y' - y = 0$

2.26. $y^{(iv)} - 2y''' + y'' = 0$

2.27. $y^{(iv)} + 4y = 0$

2.28. $y^{(iv)} + y'' - 12y = 0$

2.29. $y^{(iv)} + 10y'' + 25y = 0$

Resolver os seguintes problemas:

2.30.
Uma curva integral $y = u(x)$ da equação diferencial $y'' - 4y' + 29y = 0$ intersecta uma curva integral $y = v(x)$ da equação diferencial $y'' + 4y' + 13y = 0$ na origem. As duas curvas têm o mesmo declive na origem. Determinar u e v se $u'(\pi/2) = 1$.

2.31.
Em cada caso deduzir a equação diferencial linear de 2ª ordem que tem como soluções particulares:

a) $y_1 = e^x;\ y_2 = e^{-x}$

b) $y_1 = e^{2x}; y_2 = xe^{2x}$

c) $y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos x;\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} x$

Soluções

2.14. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

2.15. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

2.16. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

2.17. $y = C_1 + C_2 e^{x}$

2.18. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

Escrevendo agora a equação diferencial com estas expressões para as derivadas $y^{(k)}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\mathbf{C},\mathbf{u}^{(n)}\right)+f(x)\right]+a_1\left(\mathbf{C},\mathbf{u}^{(n-1)}\right)+\ldots+a_{n-1}\left(\mathbf{C},\mathbf{u}'\right)+a_n\left(\mathbf{C},\mathbf{u}\right)=\\
&\quad=C_1\left(u_1^{(n)}+a_1u_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}u_1'+a_nu_1\right)+\\
&\quad+C_2\left(u_2^{(n)}+a_1u_2^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}u_2'+a_nu_2\right)+\\
&\quad+\ldots+C_n\left(u_n^{(n)}+a_1u_n^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}u_n'+a_nu_n\right)+f(x)=f(x)
\end{aligned} \tag{56}$$

uma vez que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são soluções da equação homogénea.

As n condições impostas conduzem à resolução do seguinte sistema de n equações em $C_1', C_2', \ldots, C_n'$

$$\begin{cases}
C_1'u_1+C_2'u_2+\ldots+C_n'u_n=0\\
C_1'u_1'+C_2'u_2'+\ldots+C_n'u_n'=0\\
\vdots\\
C_1'u_1^{(n-1)}+C_2'u_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'u_n^{(n-1)}=f(x)
\end{cases} \tag{57}$$

É sempre possível determinar a solução deste sistema uma vez que o determinante dos coeficientes é o Wronskiano das funções linearmente independentes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e é não nulo.

Note-se ainda que este método, pelo que ficou mostrado, se aplica igualmente a equações diferenciais lineares de coeficientes não constantes.

Problema 2.32.

Calcular a solução geral da equação diferencial $y''' - 2y'' + y' = xe^x$.

Resolução

Seja a equação característica

$$r^3 - 2r^2 + r = 0$$

Das suas raízes 0 e 1, sendo esta dupla, obtém-se a solução da equação homogénea

$$y_h = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x$$

Generalizando (sem efetuar agora a demonstração que deverá ser feita pelo método de indução) deduz-se que o anulador de kx^n é D^{n+1}.

$$D^{n+1}kx^n = kD^{n+1}x^n = kD^n nx^{n-1} = \cdots = kn(n-1)\cdots 2\cdot 1D1 = 0 \tag{66}$$

No caso de funções exponenciais tem-se que o anulador de $ke^{\alpha x}$ é $D-\alpha$

$$(D-\alpha)ke^{\alpha x} = Dke^{\alpha x} - \alpha ke^{\alpha x} = \alpha ke^{\alpha x} - \alpha ke^{\alpha x} = 0 \tag{67}$$

Para $xe^{\alpha x}$ o anulador é $(D-\alpha)^2$, como se pode verificar, e no caso de $x^n e^{\alpha x}$ o anulador é $(D-\alpha)^{n+1}$.

No caso das funções $\text{sen}\beta x$ e $\cos\beta x$ o anulador é $D^2+\beta^2$

$$\left(D^2+\beta^2\right)\text{sen}\beta x = D^2\text{sen}\beta x + \beta^2\text{sen}\beta x = -\beta^2\text{sen}\beta x + \beta^2\text{sen}\beta x = 0 \tag{68}$$

e no caso de $e^{\alpha x}\text{sen}\beta x$ e $e^{\alpha x}\cos\beta x$ o anulador é $D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2$.

Resumem-se na tabela seguinte (Tabela 2.1) os anuladores de algumas funções

Tabela 2.1.

função	anulador
1	D
x	D^2
kx^n	D^{n+1}
$ke^{\alpha x}$	$D-\alpha$
$kx^n e^{\alpha x}$	$(D-\alpha)^{n+1}$
$\cos\beta x$	$D^2+\beta^2$
$\text{sen}\beta x$	$D^2+\beta^2$
$ke^{\alpha x}\cos\beta x$	$D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2$
$ke^{\alpha x}\text{sen}\beta x$	$D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2$
$kx^n e^{\alpha x}\cos\beta x$	$\left(D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2\right)^{n+1}$
$kx^n e^{\alpha x}\text{sen}\beta x$	$\left(D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2\right)^{n+1}$

e resolvem-se por uma mudança de variável.

Considerando $\alpha + \beta x > 0$ faz-se a substituição

$$\alpha + \beta x = e^t \tag{70}$$

e t é a nova variável independente. Converte-se assim a equação (69) numa equação diferencial linear de ordem n de coeficientes constantes.

As derivadas de y são substituídas por

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\beta e^{-t} \tag{71}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}\beta e^{-t}\beta e^{-t} - \frac{dy}{dt}\beta e^{-t}\frac{dt}{dx} = \beta^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \tag{72}$$

$$y''' = \beta\beta^3 e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \tag{73}$$

etc.

No caso de $\alpha + \beta x < 0$ deve efetuar-se a substituição $\alpha + \beta x = -e^t$.

Problema 2.52.

Resolver a equação diferencial $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.

Resolução

Neste caso $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e portanto $\alpha + \beta x = x$. Tem-se

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t}$$

e também

$$y'' = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

Efetuando a substituição $x = e^t$ a equação toma a forma

$$e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] - 3e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

Problemas

Determinar as soluções das seguintes equações diferenciais:

2.54. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

2.55. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$

2.56. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

2.57. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5x\dfrac{dy}{dx} - 15y = x^4$

2.58. $x^2y'' - xy' + 2y = 1 + \ln^2 x$

2.59. $x^2y'' - 3xy' + 3y = \ln x, \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 2$

2.60. $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 15\cos(2\ln x), \quad y(1) = 2, \; y'(1) = -3, \; y''(1) = -3$

2.61. $(2+x)^2y'' + \dfrac{5}{4}y = 2 + x$

2.62. $(1+2x)^2y'' + 2(1+2x)y' = \ln(1+2x)$

Soluções

2.54. $y = C_1\cos(2\ln x) + C_2\,\mathrm{sen}(2\ln x), \quad x > 0$

2.55. $y = C_1x^3 + C_2x^2 + \dfrac{1}{2}x, \quad x > 0$

2.56. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3, \quad x > 0$

2.57. $y = C_1x^3 + \dfrac{1}{x^2}\left[C_2\cos(\ln x) + C_3\,\mathrm{sen}(\ln x)\right] + \dfrac{x^4}{37}, \quad x > 0$

2.58. $y = x\left[C_1\cos(\ln x) + C_2\,\mathrm{sen}(\ln x)\right] + 1 + \ln x + \dfrac{1}{2}\ln x^2, \quad x > 0$

2.59. $y = \dfrac{1}{9}\left(5x^3 + 4 + \ln x^3\right), \quad x > 0$

2.67. $y=c_0\left(1+3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k-3)(2k-1)}\right)+c_1\left[(x-2)-(x-2)^3\right],\quad 1<x<3$

2.68. $y=c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2^k k!}(x+3)^{2k}+c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k(k+1)!}{(2k+1)!}(x+3)^{2k+1},\quad |x+3|<\infty$

2.69. $y=c_0\left(1-\frac{x^2}{25}\right)+c_1\left(x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{5^{2k}(4k^2-1)}\right),\quad |x|<5$

2.70. $y=c_0x+c_1\left(1-x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^6-\frac{1}{7}x^8-\cdots\right),\quad |x|<1$

2.71. $y=c_0(x+1)e^{2x}$

2.72. $y=c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot(2n)}\right)+c_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\right)$

2.4.2. Soluções em série de potências generalizada. Método de Frobenius

Considere-se que x_0 é um ponto singular da equação (75)

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{75}$$

Então não é possível determinar uma solução em série de potências de $x-x_0$. Sob certas condições, a solução toma, no entanto a forma

$$y=|x-x_0|^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{81}$$

onde r é uma constante real ou complexa.

Aplicando estas propriedades os coeficientes podem escrever-se na forma

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(p+1)(p+2)\cdots(p+n)n!2^p\Gamma(p+1)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+p}n!\Gamma(p+n+1)}$$

Para cada raiz p da equação indicial a correspondente solução particular da equação de Bessel é usualmente representada por J_p e designa-se por função de Bessel de primeira espécie de ordem p

$$J_p(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p}n!\Gamma(p+n+1)} x^{2n}$$

Problemas

Usando o método de Frobenius determinar uma solução em série de potências em torno do ponto singular x_0 para cada uma das seguintes equações diferenciais:

2.74. $2x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$

2.75. $x^2y'' - xy' + \left(x^2 + \frac{8}{9}\right)y = 0$

2.76. $3xy'' - (x-2)y' - 2y = 0$

2.77. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad \left(\text{Equação de Bessel de ordem } \frac{1}{2}\right)$

2.78. $xy'' - (x^2 + 2)y' + xy = 0$

2.79. $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$

Soluções

2.74. $y = c_1 x\left(1 - \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{616} - \cdots\right) + c_2 x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{40} - \cdots\right)$

2.75. $y = c_1 x^{\frac{4}{3}}\left(1 - \frac{3x^2}{16} + \frac{9x^4}{896} - \cdots\right) + c_2 x^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{3x^2}{8} + \frac{9x^4}{320} - \cdots\right)$

Resolver os seguintes problemas de valor inicial:

3.20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$ com $x(0) = 6$ e $y(0) = -2$

3.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}$ com $x(0) = -4,\ y(0) = 0$ e $z(0) = 1$

3.22. $\begin{cases} y'_1 = 2y_2 \\ y'_2 = 2y_1 \end{cases}$ com $y_1(0) = -9$ e $y_2(0) = 15$

3.23. $\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + 4y_2 \\ y'_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases}$ com $y_1(0) = -4$ e $y_2(0) = -4$

3.24. $\begin{cases} y'_1 = -y_1 + 4y_2 \\ y'_2 = 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$ com $y_1(0) = 3$ e $y_2(0) = 4$

3.25. $\begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 25x_1 - 10x_2 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}$

3.26. $\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_3 \\ x'_2 = -2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x'_3 = 8x_1 - 3x_3 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Soluções

3.4. $x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \qquad x_2 = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}$

3.5. $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \quad y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \quad z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$

Então tem-se

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \tag{8}$$

$$= \lim_{\substack{M\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(\int_\varepsilon^{t_0-\varepsilon} f'(t)e^{-st}dt + \int_{t_0+\varepsilon}^{M} f'(t)e^{-st}dt \right) = \tag{9}$$

e usando integração por partes

$$= \lim_{\substack{M\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(\left(f(t)e^{-st}\right)_\varepsilon^{t_0-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{t_0-\varepsilon} -se^{-st} f(t)dt + \left(f(t)e^{-st}\right)_{t_0+\varepsilon}^{M} - \right. \tag{10}$$

$$\left. \int_{t_0+\varepsilon}^{M} - f(t)se^{-st}dt \right) =$$

$$= \lim_{\substack{M\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(e^{-st_0^-} f(t_0^-) - f(0^+)e^{-s\cdot 0^+} + s\int_\varepsilon^{t_0-\varepsilon} f(t)e^{-st}dt + f(M)e^{-sM} + \right. \tag{11}$$

$$\left. - e^{-st_0^+} f(t_0^+) + s\int_{t_0+\varepsilon}^{M} f(t)e^{-st}dt \right)$$

Analisando agora cada um dos limites tem-se

$$\lim_{M\to\infty} f(M)e^{-sM} = 0$$

por a função f ser de ordem exponencial e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(e^{-st_0^-} f(t_0^-) - e^{-st_o^+} f(t_0^+)\right) = 0$$

por f ser contínua.
Finalmente somando os integrais e calculando os limites restantes tem-se

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \tag{12}$$

■

Corolário 1

Se $f(t)$ e $f'(t)$ são funções contínuas de ordem exponencial em $[0,\infty)$ e se $f''(t)$ é também de ordem exponencial e contínua por secções em $[0,\infty)$ então

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \tag{13}$$

4.23. $\dfrac{s^2+a^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$

4.24. $\dfrac{s^2-8}{s\left(s^2-16\right)}$

4.25. $\dfrac{2a^2s}{\left(s^2+a^2\right)\left(s^2+9a^2\right)}$

4.26. $\dfrac{6s^2-2}{\left(s^2+1\right)^3}$

4.3. Inversa da transformada de Laplace e aplicação às equações diferenciais

O problema da determinação da inversa da transformada de Laplace consiste em dada uma função $F(s)$ determinar a função $f(t)$ que tem $F(s)$ por transformada de Laplace. A inversa que é designada por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ é $f(t)$.

A inversa da transformada de Laplace, se for contínua, é única e possui também a propriedade da linearidade.

Problema 4.27.

Calcular a inversa da seguinte transformada de Laplace $F(s)=\dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}$.

Resolução

Começando por reduzir $\dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}$ a frações simples. Tem-se

$$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

4.58. $y = \frac{t^3 e^{-t}}{3!} + e^{-t} - te^{-t}$

4.59. $y = (3 - 4t)e^t + \operatorname{sen} t - 3\cos t$

4.60. $y = e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{60}t^5 e^t$

4.61. $x = e^{-t} \operatorname{sen} t \quad y = 2e^{-3t} - 2e^{-t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$

Considere-se agora para uma função $f(t)$ uma translação no eixo dos *tt* e a sua implicação na transformada de Laplace. Seja por exemplo a função de Heaviside (função em degrau), (Fig. 4.1.)

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \tag{29}$$

que é uma translação de a unidades para a direita na função $f(t) = 1$ com $t \geq 0$.

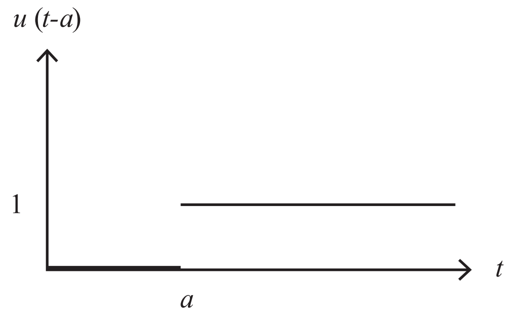


Figura 4.1.

Seja agora um caso mais geral de translação de a para a direita numa função $f(t)$ e designe-se essa nova função por (Fig. 4.2.)

$$f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ f(t-a), & t > a \end{cases} \tag{30}$$

que graficamente tem a representação seguinte

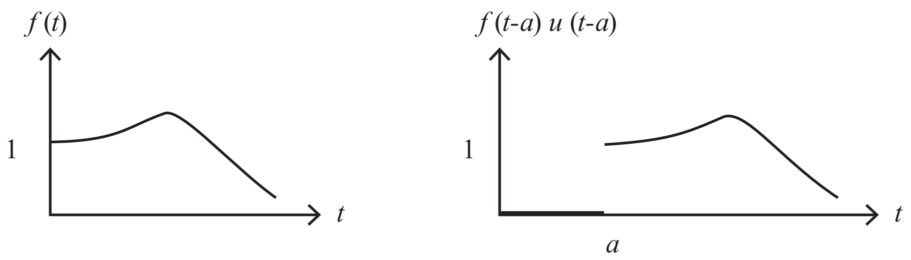


Figura 4.2.

Teorema (Segundo teorema da translação)

Seja $f(t)$ contínua por secções e de ordem exponencial em $[0,\infty)$ com transformada de Laplace dada por $F(s)$. Considerando a função

$$f(t-a)u(t-a)=\begin{cases}0, & 0<t<a\\ f(t-a), & t>a\end{cases}$$, então

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s) \tag{31}$$

Demonstração

Aplicando a definição de transformada de Laplace obtém-se

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=\int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt= \tag{32}$$

$$=\int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt \tag{33}$$

Fazendo a mudança de variável $T=t-a$ tem-se

$$\int_0^{\infty} f(T)e^{-s(T+a)}dT=e^{-as}\int_0^{\infty} f(T)e^{-sT}dT=e^{-as}F(s) \tag{34}$$

■

4.5. Transformada de Laplace da função Delta de Dirac

Considere-se a função (Fig. 4.3.)

$$f_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & a \leq t \leq a+k \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases} \tag{35}$$

que representa uma força f_k cujo impulso no intervalo $[a, a+k]$ é representado pelo integral definido de f_k nesse intervalo. Esse integral tem valor 1.

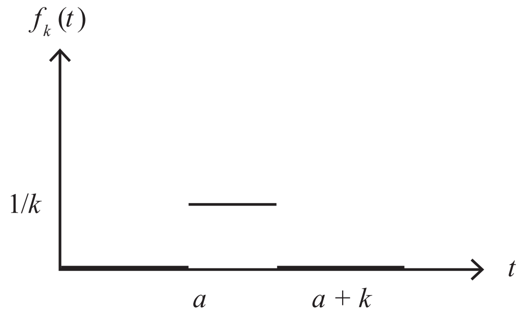


Figura 4.3.

Esta função pode ser representada por

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left[u(t-a) - u(t-a-k)\right] \tag{36}$$

e a sua transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{f_k(t)\} = \frac{1}{k}\left(\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+k)s}}{s}\right) = e^{-as}\,\frac{1-e^{-ks}}{ks} \tag{37}$$

A "função" delta de Dirac é definida pelo limite

$$\delta(t-a) = \lim_{k \to 0} f_k(t) \tag{38}$$

4.87. $y(t)=\begin{cases}3e^{-2t}\operatorname{sen} t, & 0<t<1\\ 3e^{-2t}\operatorname{sen} t+e^{2}e^{-2t}\operatorname{sen}(t-1), & t>1\end{cases}$

4.88. $y(t)=\begin{cases}e^{-t}\cos t, & 0<t<2\pi\\ e^{-t}\cos t+e^{2\pi}e^{-t}\operatorname{sen} t, & t>2\pi\end{cases}$

4.89. $y(t)=\begin{cases}2e^{-t}+e^{-3t}, & 0<t<\frac{1}{2}\\ 2e^{-t}+e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{t-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}e^{-3\left(t-\frac{1}{2}\right)}, & t>\frac{1}{2}\end{cases}$

4.6. Transformada de Laplace do integral

Teorema

Seja $f(t)$ contínua por secções em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial. Então a transformada de Laplace de $\int_0^t f(x)dx$ é dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{40}$$

Demonstração

Como $f(t)$ é contínua por secções em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial, a função $F(t)=\int_0^t f(x)dx$ é contínua em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial. Então pode aplicar-se o teorema da transformada de Laplace da derivada

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{F'(t)\}=s\mathcal{L}\{F(t)\}-F(0)= \tag{41}$$

$$=s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}-\int_0^0 f(x)dx \tag{42}$$

e portanto tem-se

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{43}$$

ou

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}F(s) \tag{44}$$

■

4.110. $\ln \frac{\sqrt{s^2+9}}{s}$

4.111. $\operatorname{arc\,cotg} \frac{s+3}{2}$

4.112. $t \operatorname{senh} 2t$

4.113. $t\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$

4.114. $\frac{\operatorname{sen} \omega t}{t}$

4.8. Teorema da convolução

Um processo importante de determinação da inversa de transformadas de Laplace é dado pelo teorema da convolução. A convolução de duas funções *f* e *g* é definida por

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{54}$$

sendo *f* e *g* duas funções contínuas por secções em qualquer intervalo fechado finito $0 \leq t \leq b$.

Teorema (Teorema da convolução)

Sejam *f*(*t*) e *g*(*t*) duas funções contínuas por secções em cada intervalo $0 \leq t \leq b$ e de ordem exponencial $e^{\gamma t}$ então

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \mathcal{L}\{g\} \tag{55}$$

para $s > \gamma$.

Demonstração

Por definição de transformada de Laplace tem-se

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) e^{-st} dt \tag{56}$$

que pode ser escrito como

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt \tag{57}$$

e assim sucessivamente podem definir-se diferenças de qualquer ordem Δ^k pela expressão

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1}{}_{n+1} y - \Delta^{k-1} y_n \qquad k = 1,2,... \tag{5}$$

5.1.2. Diferenças centrais e diferenças divididas

Para algumas aplicações como em problemas de interpolação e na resolução numérica de equações diferenciais é mais conveniente usar outro tipo de diferenças designadas diferenças centrais e que são definidas por

$$\delta y_n = y_{n+\frac{1}{2}} - y_{n-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

em que o ponto x_i é central relativamente a $x_{i-\frac{1}{2}}$ e $x_{i+\frac{1}{2}}$.

A diferença central de segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned}\delta^2 y_n = \delta y_{n+\frac{1}{2}} - \delta y_{n-\frac{1}{2}} &= (y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1}) = \\ &= y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\end{aligned} \tag{7}$$

diferenças divididas seja para a frente ou centrais (ou ainda para trás, mas que não são aqui referidas). Se os pontos de uma dada malha são igualmente espaçados de uma quantidade h a diferença dividida para a frente é dada por

$$\Delta y_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \tag{8}$$

e no caso de diferenças de segunda ordem

$$\Delta^2 y_n = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2} \tag{9}$$

Se forem consideradas diferenças centrais tem-se respetivamente para primeira e segunda ordem

$$\delta y_n = \frac{\delta y_{n+\frac{1}{2}} - \delta y_{n-\frac{1}{2}}}{h} \tag{10}$$

Se forem dados os dois valores y_0 e y_1 como os dois primeiros elementos da sucessão que é solução da equação, é possível obter y_2 em função de y_0 e y_1, depois y_3 em função de y_2 e y_1, e assim sucessivamente calculam-se todos os elementos da sucessão por recorrência. O problema de encontrar a solução de uma equação de diferenças satisfazendo condições iniciais dadas é designado problema de valor inicial. No caso geral de a equação ser de ordem *n* serão dados os valores y_0, y_1 ,..., y_{n-1}.

Teorema

Seja a equação de diferenças linear não homogénea de coeficientes constantes (ou coeficientes que são sucessões dadas)

$$a_0 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n \tag{17}$$

sendo a_0, a_1, a_2 constantes e f_n uma dada sucessão. Se *A* e *B* são duas constantes tais que $y_0 = A$ e $y_1 = B$ a solução de (11) (que no caso de $a_0 = 0$ é uma equação de primeira ordem) existe e é única. À semelhança da teoria das equações diferenciais o resultado é válido para equações de ordem *n* e ainda para equações de coeficientes não constantes.

Teorema

Considere-se o Casoratiano de duas sucessões u_n, v_n definido por

$$\begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Sejam duas sucessões u_n, v_n soluções de uma equação de diferenças linear e homogénea. Então o Casoratiano é sempre diferente de zero ou zero para todos os valores de *n*. No primeiro caso as soluções são linearmente independentes e no segundo linearmente dependentes.

Exemplificando com as sucessões 1 e 2^n o Casoratiano é dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{vmatrix} = 2^{n+1} - 2^n = 2^n (2-1) = 2^n \neq 0$$

e é sempre diferente de zero.

5.3.1. Método passo a passo

Dada a equação (14) e dois valores iniciais y_0, y_1, podem obter-se por recorrência todos os valores da sucessão calculando y_2 em função de y_0, y_1, depois y_3 em função de y_1, y_2, etc. Tem-se

$$y_2 = -\frac{a_1 y_1 + a_2 y_0}{a_0}$$

$$y_3 = -\frac{a_1 y_2 + a_2 y_1}{a_0}$$

e assim sucessivamente, todos os termos vão sendo calculados. Este método é, portanto, um método explícito.

Problema 5.1.

Calcular os valores de y_n, $n = 2,3,4,5$ para o problema de valor inicial $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$, com $y_0 = 0, y_1 = 1$.

> **Resolução**
>
> Calculando passo a passo tem-se
>
> $$y_2 = 3y_1 - 2y_0 = 3$$
>
> $$y_3 = 3y_2 - 2y_1 = 7$$
>
> $$y_4 = 3y_3 - 2y_2 = 15$$
>
> $$y_5 = 3y_4 - 2y_3 = 31$$

5.3.2. Determinação da solução geral como combinação linear de soluções

Considere-se a equação (14) e procurem-se soluções não nulas, (já que a sucessão de termos repetidamente nulos é obviamente solução) na forma

$$y_n = r^n \tag{22}$$

5.4.1. Determinação de uma solução particular

O método dos coeficientes indeterminados permite calcular uma solução particular da equação de diferenças para alguns tipos de sucessões que figurem no segundo membro da equação.

São cinco os casos considerados e dispostos na Tabela 5.1.:

Tabela 5.1.

f_n	forma da solução particular
1. C constante	A
2. $C\,n^k$ (k inteiro)	$A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + ... + A_{k-1} n + A_k$
3. Cb^n	Ab^n
4. C cos $(n\theta)$	A cos $(n\theta)$ + B sen $(n\theta)$
5. C sen $(n\theta)$	A cos $(n\theta)$ + B sen $(n\theta)$

Os coeficientes considerados na forma da solução particular procurada são determinados simplesmente substituindo na equação geral e resolvendo um sistema de equações.

No entanto, no caso de a solução da equação homogénea conter um termo do mesmo tipo da sucessão do segundo membro, a solução particular não deverá ser igual a essa, mas sim ainda do mesmo tipo e multiplicada pela menor potência de n que elimina essa duplicação. Alguns exemplos para o caso de equações de segunda ordem podem ser os apresentados a seguir na Tabela 5.2.:

Tabela 5.2.

f_n (alguns exemplos)	forma da solução particular se f_n do mesmo tipo de h_n
1. C constante	An
2. $C\,n^3$ (e $h_n = c_1 + c_2 n$)	$(A_1 + A_2 n + A_3 n^2 + A_4 n^3)\, n^2$
3. Cb^n	Anb^n
4. C cos $(n\theta)$	nA cos $(n\theta)$ + nB sen $(n\theta)$
5. C sen $(n\theta)$	nA cos $(n\theta)$ + nB sen $(n\theta)$

sendo os valores dados designados condições fronteira de Dirichlet. Muitos problemas incluem alternativamente condições fronteira que contêm as derivadas da solução em dados pontos, por exemplo $u'(a) = \alpha$ e neste caso designam-se condições fronteira de Neumann. Em casos mais gerais as condições fronteira contêm combinações de valores da função assim como da derivada em determinados pontos e designam-se então por condições fronteira mistas.

A resolução de equações de diferenças como problema de valor inicial é consideravelmente diferente do caso de problema de valor na fronteira. No primeiro caso os valores de y_n são normalmente determinados um após outro por um processo sequencial explícito. Em problemas de valor na fronteira tal não é possível e é necessário resolver um sistema de equações e obter as soluções simultaneamente, tratando-se de um método implícito. Os métodos explícitos são mais fáceis de aplicar, mas os implícitos têm a vantagem de que tendem a ser mais estáveis e ter convergência assegurada.

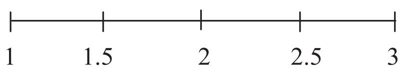
Sendo o objetivo deste capítulo a abordagem da resolução numérica de equações diferenciais, nos exemplos apresentados a seguir as derivadas são aproximadas por diferenças finitas centrais ou para a frente e são apresentadas apenas equações de primeira e segunda ordem. São ainda apresentados modelos matemáticos em que a equação é não linear, mas onde o método se aplica mesmo assim, obtendo-se a solução iterativamente, como é o caso da evolução de uma dada população (problema 5.19.).

Problema 5.17.

Resolver a equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y$ usando o método das diferenças finitas com $\Delta x = 0.5$ e $y(1) = 0.5876,\ y(3) = 5.00895$.

Resolução

Considerando os cinco pontos $x_1 = 1,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2.5,\ x_5 = 3,$ e



escrevendo a equação de diferenças centrais associada

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_n \qquad n = 2,3,4$$

Soluções

5.19. 113.3 e 135.4 milhares

5.20. $y_1 = 0.4137$
$y_2 = 0.5603$
$y_3 = 0.7151$
$y_4 = 0.8869$
$y_5 = 1.0890$

5.21.

x	y	**solução exata com 3 casas decimais**
-0.4	0.230	0.230
-0.2	0.657	0.659
0	0.997	1.000
0.2	1.257	1.259
0.4	1.430	1.430

5.22. 0.254 e 0.317

5.23.

x	y $(\Delta x = .5)$	y $\Delta x = 1$
4.5	0.0340	
5	0.0320	0.0326
5.5	0.0321	
6	0.0333	0.0337
6.5	0.0352	

5.24.

x	y $(\Delta x = .2)$
1.2	4.991
1.4	5.489
1.6	6.207
1.8	7.163

LUÍSA MADUREIRA

Problemas de Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace

5.ª Edição

REVISTA E AUMENTADA

Sobre a obra

As equações diferenciais têm uma ampla aplicação no domínio da Engenharia, ao qual se dirige este livro de exercícios. Elaborado tendo em conta objetivos pedagógicos a partir da lecionação de disciplinas da formação de base Matemática em Engenharia, nele são abordadas as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e ordem superior ou sistemas. Inclui também um capítulo sobre Transformadas de Laplace e um de aplicação de métodos numéricos. Em todos os temas são apresentados exemplos resolvidos e propostos vários exercícios com respetivas soluções, num total de perto de 400 problemas.

Sobre a autora

Luísa Madureira, natural do Porto, concluiu a licenciatura em Matemática Aplicada em 1984 pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Pertence ao corpo Docente da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, sendo Professora Auxiliar do departamento de Engenharia Mecânica, onde leciona unidades curriculares de Análise Matemática a vários Mestrados Integrados. É Doutorada em Engenharia Mecânica pela FEUP, tendo concluído a tese em 1996. Tem vários artigos científicos publicados sobre métodos numéricos na área de Engenharia Mecânica.

Também disponível em formato *e-book*

ISBN: 978-989-892-758-3

9 789898 927583

www.**engebook**.pt

engebook