LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO DUPLA

engebook

AUTOR
Luís António de Almeida Vieira

TÍTULO
Cálculo Integral – Integração Dupla

EDIÇÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.
E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA
Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO
Booki – Conteúdos Especializados
Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

REVISÃO
Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

DESIGN DE CAPA
Luciano Carvalho
Publindústria, Produção de Comunicação, Lda.

A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2018 | Publindústria, Produção de Comunicação, Lda.
Todos os direitos reservados a Publindústria, Produção de Comunicação, Lda. para a língua portuguesa.
A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor, é ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio, seja eletrónico, mecânico, de fotocópia, de gravação ou outros sem autorização prévia por escrito do autor.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU
51 Matemática
517 Análise Matemática

ISBN
Papel: 9789898927361
E-book: 9789898927378

Booki – Catalogação da publicação
Família: Bases de Engenharia
Subfamília: Matemática

Conteúdo

Dedicatória 7

Agradecimentos 9

Prefácio 11

1 Integração 15

1.1 Introdução à Integração Dupla 17

1.2 Volume de sólidos 31

1.3 Cálculo Integral num Rectângulo 38

1.3.1 Propriedades do Integral Duplo 38

1.3.2 Integrais Duplos em Regiões mais Gerais 41

1.3.3 Propriedades Elementares dos Integrais 50

1.4 Aplicações dos Integrais Duplos 51

1.5 Exercícios Propostos 63

2 Mudança de Ordem de Integração **67**

2.1 Mudança de Ordem de Integração num Integral I 69

2.2 Exercícios Propostos 84

3 Mudança de Variável **87**

3.1 Mudança de variável 89

3.1.1 Mudanças Lineares 89

3.1.2 Mudança de Coordenadas Polares 90

3.2 Mudança de Variável de Coordenadas Cartesianas para Polares 94

3.2.1 Cálculo de Volumes 99

3.3 Exercícios Propostos 107

4 Apêndice **109**

Bibliografia **121**

Prefácio

Este livro apresenta um conjunto de exercícios que o autor formulou em diversas provas no decorrer da sua atividade letiva, quer como docente do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (UA), quer como docente da Secção de Matemática e Física do Departamento de Engenharia Cívil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP).

Pretende-se que este livro sirva como uma boa ferramenta de apoio aos alunos dos primeiros anos de Engenharia, e, de um modo geral, que contribua para que as matérias lecionadas nas disciplinas de Matemática se tornem mais atrativas, e que se conclua a necessidade da Matemática no desenvolvimento científico dos alunos de Engenharia.

Estes objectivos são exemplificados pela preparação do livro tendo em conta o trabalho com os meus alunos do primeiro ano, quer do Departamento de Engenharia Química, quer do Departamento de Engenharia de Minas, quer do Departamento de Engenharia Cívil, em especial os alunos de Análise Matemática I do ano letivo de 2018/2019 da

Licenciatura em Ciências de Engenharia - Engenharia de Minas e de Geo-Ambiente (LCEEMG) e de Ambiente da FEUP, e aos alunos da unidade de Análise Matemática 2 de Engenharia Cívil da Feup. Muito deste trabalho é inspirado nos livros de Integração de Carlos Espain Neves de Oliveira (cf. Bibliografia [6] e [7]), meu pai, nos livros de Cálculo de N. Piskounov (cf. Bibiliografia [10]), e no meu trabalho de investigação decorrente da docência de Análise Matemática I, Análise Matemática II e Análise Matemática VI (cf. Bibliografia [13]).

1.1 Introdução à Integração Dupla

O objectivo deste capítulo é encontrar maneiras de generalizar o conceito de integral definido de uma função real de variável real aos casos em que f é uma função de duas variáveis. Procuramos ainda explorar como usar a integração dupla para representar certas quantidades físicas.

Se f é uma função real de variável real contínua e não negativa definida no intervalo $[a,b]$ com $a<b$ então $\int_a^b f(x)dx$ existe e representa a área da região $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : (a\leq x\leq b)\wedge(0\leq y\leq f(x)\}$. Suponhamos agora que f é uma função real de variável real contínua de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ não negativa definida num rectângulo $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : (a\leq x\leq b)\wedge(c\leq y\leq d)\}$. De um modo análogo ao caso da integração de uma função real de variável real, deve haver algum tipo de integral que represente o volume do sólido $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (a\leq x\leq b)\wedge(c\leq y\leq d)\wedge(0\leq z\leq f(x,y)\}$. Podemos encontrar tal tipo de integral se utilizarmos o princípio de Cavalieri que não é mais que o método das secções transversais. Seja $x\in[a,b]$ e considere-se a função g definida por $g(y)=f(x,y), y\in[c,d]$, e considere-se a região do espaço D_x que está no plano vertical paralelo ao plano coordenado Oyz e cuja abcissa é sempre x e cuja ordenada está entre c e d, e $0<z\leq f(x,y)$. Ou seja $D(x)=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : (u=x)\wedge(c\leq v\leq d)\wedge(0\leq w\leq f(x,v))\}$. Designe-se a área desta secção por $A(x)$. Mas então $A(x)=\int_c^d f(x,y)dy$, visto que estamos a considerar x fixo e y varia entre c e d. Tudo tem

$x < d) \wedge (0 \leq z \leq f(x,y)\}$ *é dado por* $Volume(W) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$.

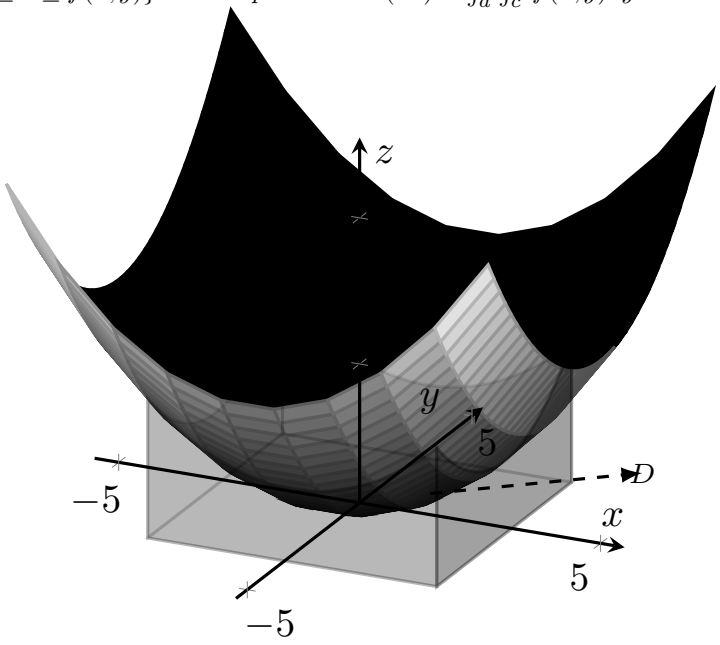


Figura 1.4: Região W

Exercício 1.1.1. *Represente geometricamente a região D onde*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((0 \leq x \leq 2) \wedge (x \leq y \leq 2x)) \vee ((2 \leq x \leq 4) \wedge (2x-2 \leq y \leq x+2))\}.$$

Resolução 1.1.1. *A região D encontra-se representada na figura 1.5.*

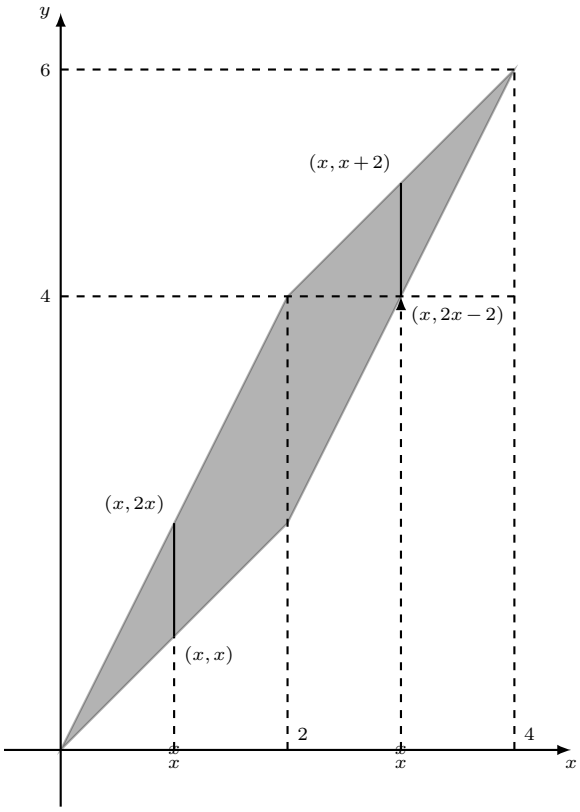


Figura 1.5: Região de Integração D

Exercício 1.1.2. *Calcule o integral $I = \int\int_D f(x,y)dydx$ e represente graficamente a região de integração D de I onde:*

a) $I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x+1)dydx$;

b) $I = \int_0^1 \int_0^x (1-y)dydx$;

que apresentamos na figura 1.10.

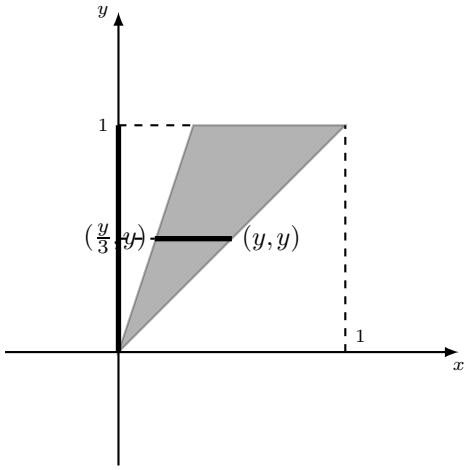


Figura 1.10: Região de Integração de I

Calculemos agora I. Temos que

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{y}{3}}^{y} e^y dx dy = \int_0^1 (e^y x)\,|_{\frac{y}{3}}^{y} dy = \int_0^1 e^y (y - \tfrac{y}{3}) dy$$

$$= \tfrac{2}{3} \int_0^1 e^y y dy = \tfrac{2}{3} \int_0^1 e^y y dy = \tfrac{2}{3} \Big((e^y y)\,|_0^1 - \int_0^1 e^y dy \Big)$$

$$= \tfrac{2}{3} \left(e - 0 - (e^y)|_0^1 \right) = \tfrac{2}{3} (e - (e-1)) = \tfrac{2}{3}(e - e + 1)$$

$$= \tfrac{2}{3}.$$

e) A região D de integração é tal que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq y \leq 1) \wedge (y \leq x \leq 2-y)\}$

esta representada na figura 1.11.

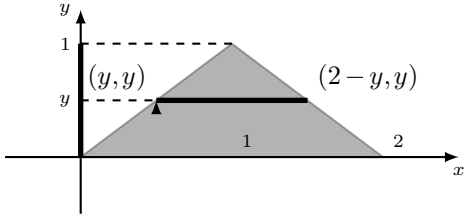


Figura 1.11: Região de Integração de I

Assim, tem-se

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_y^{2-y} cos(x)dxdy \\
&= \int_0^1 (sen(x))|_y^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 (sen(2-y) - sen(y))dy \\
&= \int_0^1 sen(2-y)dy - \int_0^1 sen(y)dy \\
&= -\int_0^1 sen(2-y)(-1)dy - \int_0^1 sen(y)dy \\
&= -(-\cos(2-y))|_0^1 - (-\cos(y))|_0^1 \\
&= -(-\cos(1)+\cos(2)) - (-\cos(1)+\cos(0)) \\
&= 2\cos(1) - \cos(2) - 1.
\end{aligned}
$$

f) Aqui, tem-se que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (4 \leq y \leq 8) \wedge (\sqrt{y-4} \leq x \leq \sqrt{\frac{y}{2}})\}$$

cuja representação geométrica se apresenta na figura 1.12.

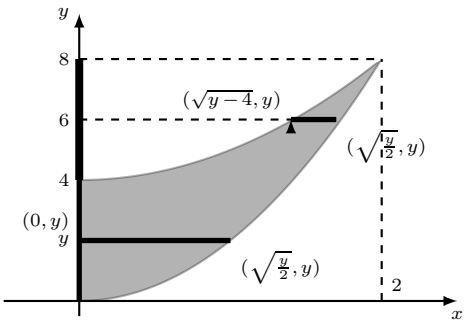


Figura 1.12: Região de Integração de I

1.2 Volume de sólidos

Exercício 1.2.1. *Encontre o volume V do sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq x+y\}$.*

Resolução 1.2.1. *Na figura 1.14 apresentamos uma representação gráfica de S.*

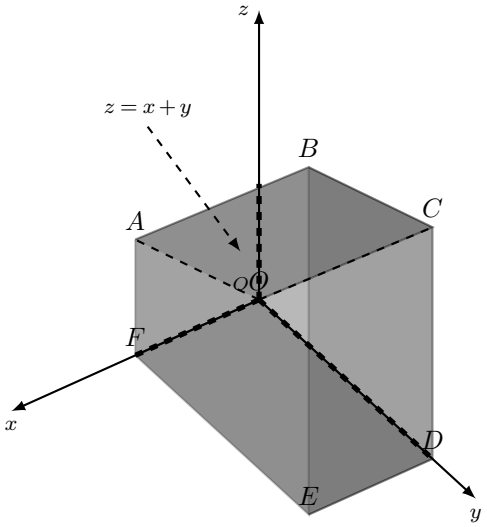


Figura 1.14: Pirâmide

Considere-se a função f tal que $f(x,y) = x+y, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. O volume do sólido S,V é tal que,

$$V = \int_0^2 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x+y)dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{x^2}{2} + xy \right) |_0^1 dy = \int_0^2 \left(\tfrac{1}{2} + y - 0 \right) dy = \int_0^2 \tfrac{1}{2} dy + \int_0^2 y dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^2 dy + [\tfrac{y^2}{2}]_0^2 = \tfrac{1}{2}[y]_0^2 + \tfrac{4}{2} - \tfrac{0^2}{2} = \tfrac{1}{2}(2-0) + 2$$

$$= 1 + 2 = 3.$$

Exercício 1.2.2. *Calcule o volume da região* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 1) \wedge (0 \leq z \leq 1-y^2)\}$.

Resolução 1.2.2. *A representação gráfica da região* W *encontra-se na figura 1.15.*

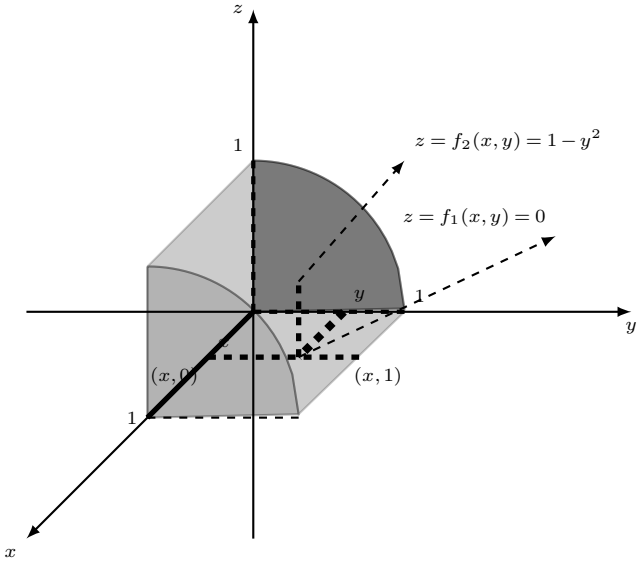


Figura 1.15: Região W

Assim, tem-se:

$$Vol(W) = \int_0^1 \int_0^1 (f_2(x,y) - f_1(x,y))\, dydx = \int_0^1 \int_0^1 (1-y^2-0) dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (1-y^2) dydx = \int_0^1 \int_0^1 1 dydx - \int_0^1 \int_0^1 y^2 dydx$$

$$= \int_0^1 (y)|_0^1 dx - \int_0^1 (\tfrac{y^3}{3})|_0^1 dx = \int_0^1 (1-0)dx - \int_0^1 (\tfrac{1}{3}-0)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \tfrac{1}{3} dx$$

$$= (x)|_0^1 - (\tfrac{x}{3})|_0^1$$

$$= (1-0) - (\tfrac{1^3}{3} - \tfrac{0^3}{3}) = 1 - \tfrac{1}{3}$$

$$= \tfrac{2}{3}.$$

Exercício 1.2.5. *Calcule o volume da região* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x^2+y^2 \leq 1) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge (0 \leq z \leq 2-x)\}$.

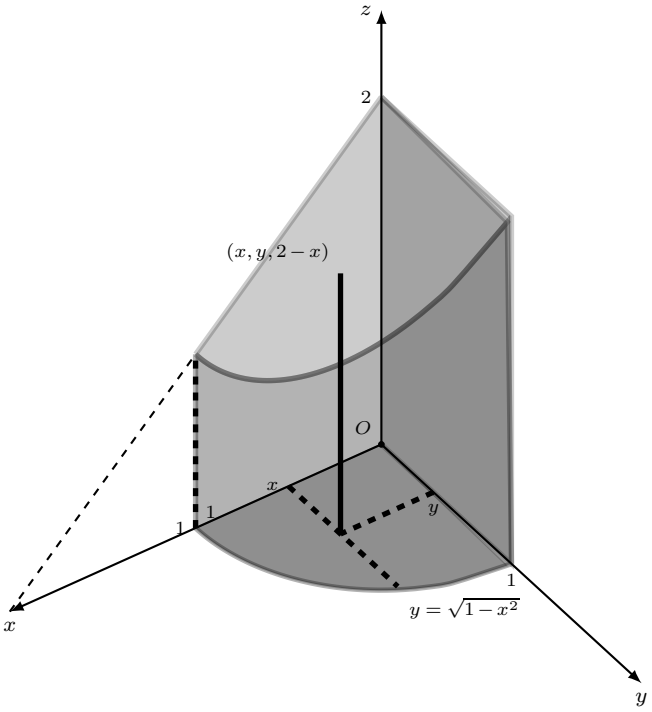


Figura 1.18: Região W

Resolução 1.2.5. *Tem-se:*

$$volume = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2-x)\,dydx = \int_0^1 (2y-xy)\big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(2\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - 0\right) dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= 2\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)|_0^1 = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3}$$

$$= \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{6}.$$

Exercício 1.2.6. *Calcule o volume da região* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 2) \wedge (0 \leq z \leq 4 - x^2) \wedge (0 \leq y \leq 6 - z)\}$.

Resolução 1.2.6. *Assim, tem-se a seguinte representação gráfica de W.*

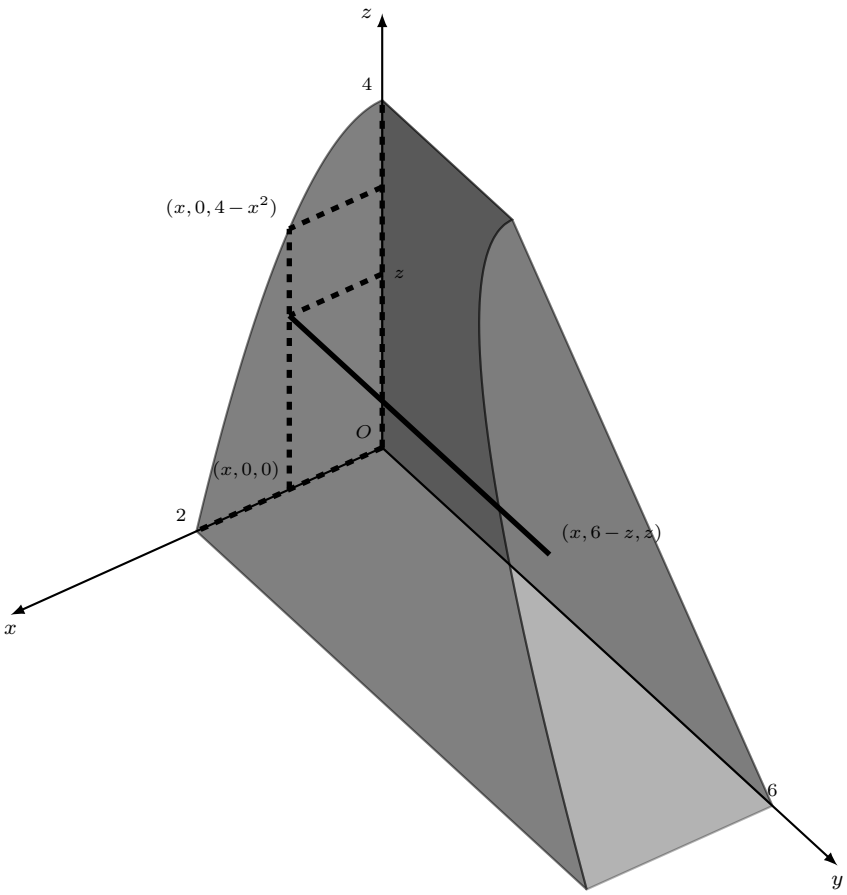


Figura 1.19: Região W

$$volume(W) = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (6-z)dzdx$$

$$= \int_0^2 \left(6z - \tfrac{z^2}{2}\right) |_0^{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \left(6(4-x^2) - \tfrac{(4-x^2)^2}{2} + 0\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(24 - 6x^2 - \tfrac{16-8x^2+x^4}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^2 (16 - 2x^2 - \tfrac{x^4}{2})dx$$

$$= \left(16x - 2\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^5}{10}\right) |_0^2$$

$$= 32 - \tfrac{16}{3} - \tfrac{32}{10}$$

$$= \tfrac{80}{3} - \tfrac{16}{5}$$

$$= \tfrac{400}{3} - \tfrac{48}{15}$$

$$= \tfrac{352}{15}.$$

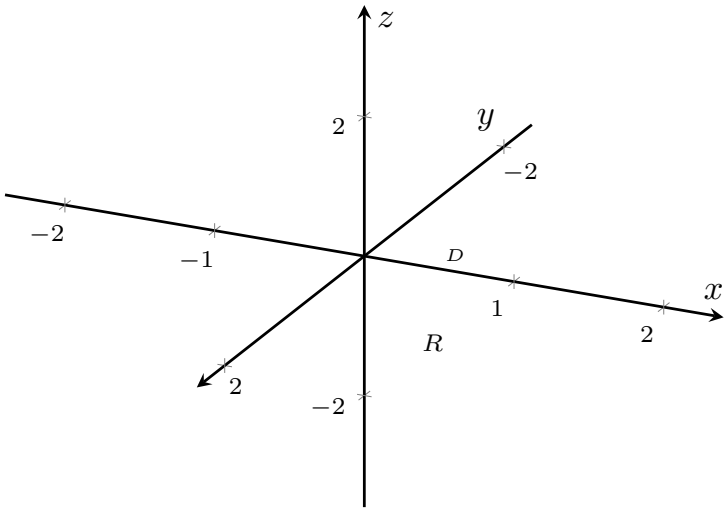


Figura 1.20: Rectângulo contendo D

1.3.2 Integrais Duplos em Regiões mais Gerais

Sejam D uma região limitada de $\mathbb{R}^2$, f uma função de D em $\mathbb{R}$ limitada em D, R um rectângulo tal que $D \subset R$ e f^* a função prolongamento de f a R definida em (1.1).

$$f^*(x,y) \quad = \quad \begin{cases} f(x,y) \quad \text{se}(x,y) \in D \\ \\ 0 \qquad \text{se}(x,y) \notin R \setminus D \end{cases} \tag{1.1}$$

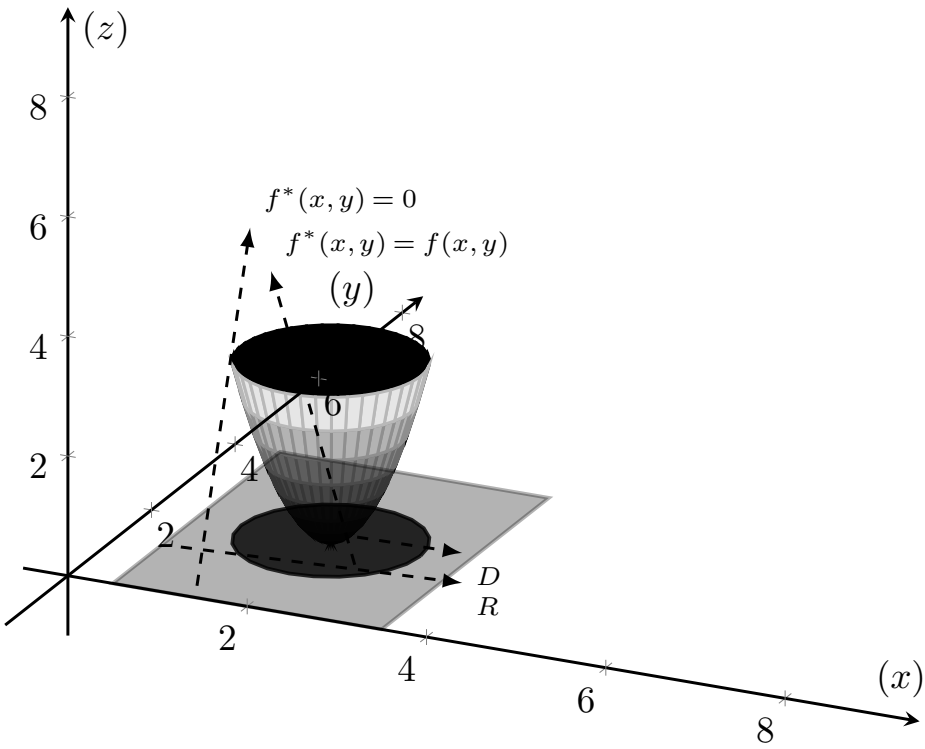


Figura 1.21: Gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$

Dizemos que f é integrável em D se e só se f for integrável no rectângulo R e definimos

Definição 1.3.2. *{Região do tipo 2} Seja D uma região limitada de $\mathbb{R}^2$. Se $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (c < y < d) \wedge (g_1(y) \leq x \leq g_2(y))\}$ com g_1 e g_2 funções reais de variável real contínuas em $[c,d]$ então dizemos que D é uma região do tipo* 2

Observação 1.3.1. *A região D da figura 1.23 é uma região do tipo 2.*

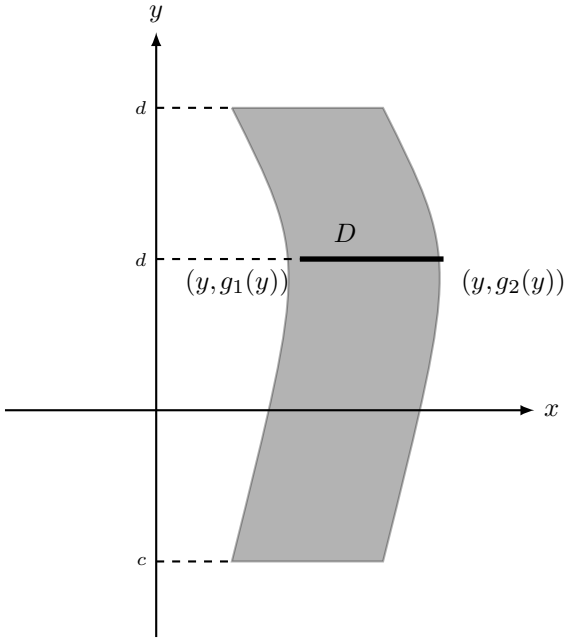


Figura 1.23: Região do tipo 2

Definição 1.3.3. *{Região do tipo 3} Uma região D limitada de $\mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo* 3 *se e só se D é uma região do tipo 1 e do tipo 2.*

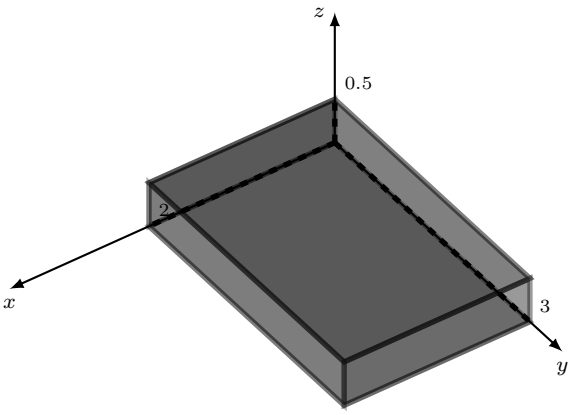


Figura 1.30: Paralelepípedo

Definição 1.4.1. *{Valor Médio de uma Função} Sejam D uma região elementar de $\mathbb{R}^2$ e f uma função integrável em D. Então a razão f_m entre o integral duplo de f em D e a área de D, $f_m = \frac{\int\int_D f(x,y)dydx}{\int\int_D dydx}$ chama-se valor médio de f em D,*

Exercício 1.4.1. *Encontre o valor médio de f na região dada D onde $f(x,y) = yx^2$;*

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (x \leq y \leq x+1)\}$.

Resolução 1.4.1. *O valor médio de f que vamos denotar por f_m é definido através da igualdade*

$$f_m = \frac{\int\int_D f(x,y)dydx}{area(D)}.$$

Tem-se

$$area(D) = \int\int_D 1dydx = \int_0^1 \int_x^{2x} dydx = \int_0^1 (y)|_x^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 (2x - x)dx = \int_0^1 xdx = (\tfrac{x^2}{2})|_0^1$$

$$= \tfrac{1}{2}.$$

Exercício 1.4.3. *Determine o centro geométrico da região* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \leq y \leq 1) \wedge \left(1-y^2 \leq x \leq 1+y^2\right)\}$.

Resolução 1.4.3. *Na figura 1.33 apresenta-se a representação gráfica de* D.

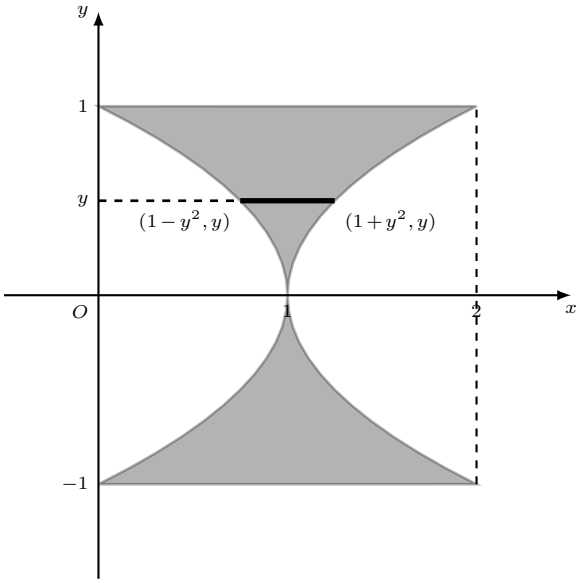


Figura 1.33: Região D

Comecemos por determinar a área de D. *Assim, tem-se*

$$area(D) = \int\int_D dydx = \int_{-1}^{1}\int_{1-y^2}^{1+y^2} dxdy = \int_{-1}^{1}(x)|_{1-y^2}^{1+y^2}dy$$

$$= \int_0^1 \left(1+y^2-(1-y^2)\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left(1+y^2-1+y^2\right)dy$$

$$= \int_0^1 2y^2dy = 2\int_0^1 y^2dy$$

$$= 2\left(\frac{y^3}{3}\right)|_{-1}^{1} = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Exercício 1.4.4. *Calcule os momentos de inércia da região D representada na figura 1.34 relativamente aos eixos coordenados sabendo que a função densidade é* $\delta(x,y)=y$ *para todo* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$.

Resolução 1.4.4. *Na figura 1.34 representa-se graficamente a região D.*

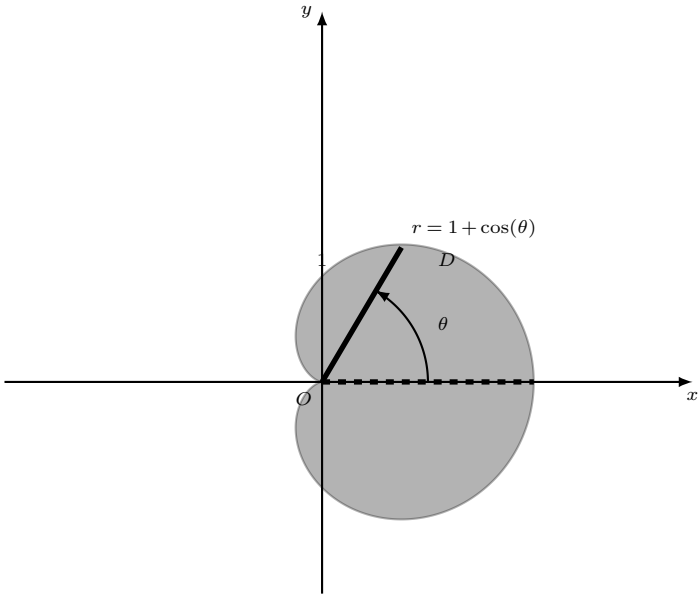


Figura 1.34: Região D

Tem-se, utilizando as relações $x=r\cos(\theta), y=rsen(\theta)$ *e* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ *então podemos concluir que*

$$I_y=\int\int_D x^2ydydx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(\theta)}(r^2\cos^2(\theta))rsen(\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(\theta)}r^4\cos^2(\theta)sen(\theta)drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(\tfrac{r^5}{5})|_0^{1+\cos(\theta)}\cos^2(\theta)sen(\theta)d\theta$$

Resolução 1.4.5. *Assim, tem-se:*

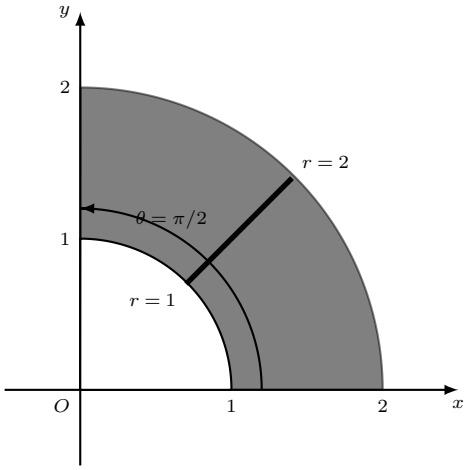


Figura 1.35: Região D

$$I_O = \int\int_D (x^2+y^2)\delta(x,y)dydx = \int\int_D (x^2+y^2)(x^2+y^2)dydx$$

$$\int\int_D (x^2+y^2)^2 dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r^4 r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r^5 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^6}{6}\right)|_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right) dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{65}{6}\right) d\theta$$

$$= \frac{65}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{65}{6}\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{65}{6}(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{65\pi}{12}.$$

1.5 Exercícios Propostos

Exercício 1.5.1. *Calcule os seguintes integrais:*

a) $\int_0^1\int_1^2 x^2 y dydx$;

b) $\int_1^2\int_0^x y dydx$;

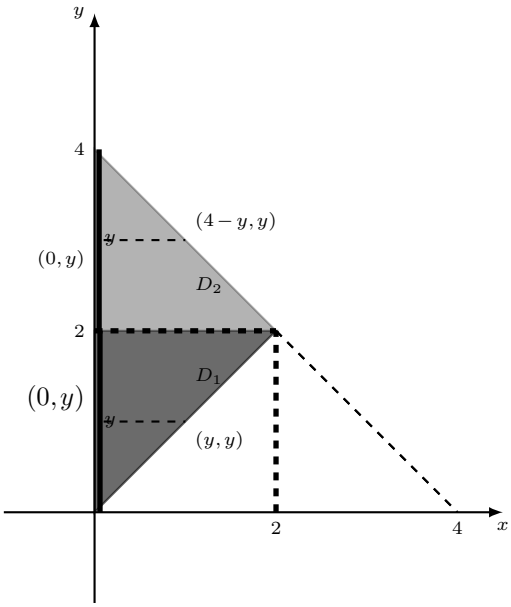


Figura 2.2: Região $D = D_1 \cup D_2$

concluimos que

$$I = \int\int_{D_1} x dx dy + \int\int_{D_2} x dx dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^y x dx dy + \int_2^4 \int_0^{4-y} x dx dy.$$

No entanto para calcular I devemos utilizar a notação $I = \int\int_D x dy dx$. Assim, tem-se

$$I = \int_0^2 \int_x^{4-x} x dy dx = \int_0^2 (xy)|_x^{4-x} dx$$

$$= \int_0^2 x(4 - x - x) dx$$

$$= \int_0^2 x(4 - 2x) dx$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2) dx$$

$$= (2x^2 - 2\frac{x^3}{3})|_0^2$$

$$= (8 - \frac{16}{3}) - (2 * 0^2 - 2 * \frac{0^3}{3}) = \frac{8}{3}.$$

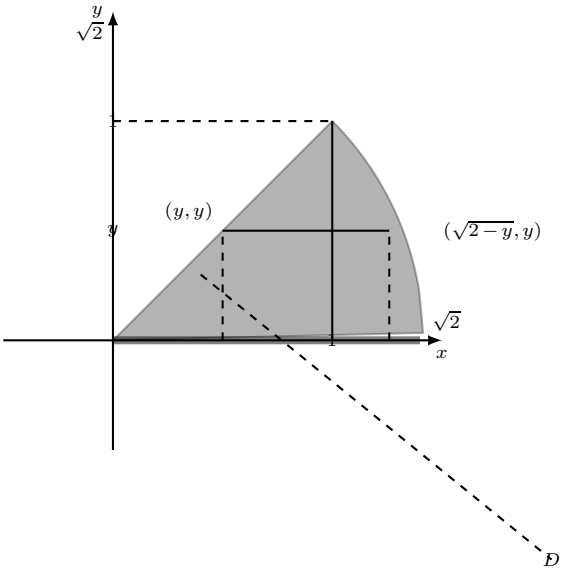


Figura 2.5: Região de Integração de I

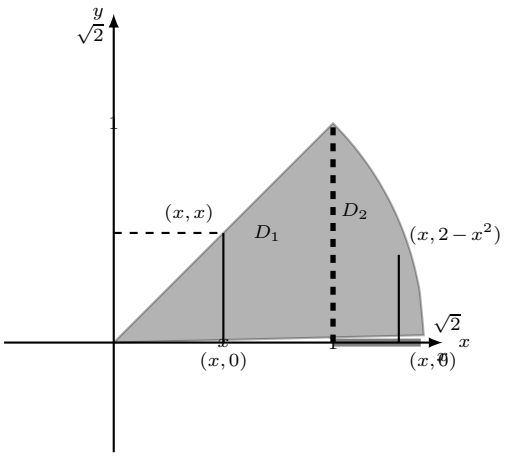


Figura 2.6: Região de Integração $D = D_1 \cup D_2$

então podemos escrever $I = \int_0^1 \int_0^x dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2-x^2} dydx$. *No entanto para cal-*

Exercício 2.1.2. *Considere o integral* $I = \int\int_D xydydx$ *onde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (x^2 \leq y \leq \sqrt{x})\}$.

a) Esboce a região de integração de I *no plano* Oxy.

b) Complete os espaços no integral $\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} xydydx$;

c) Escreva I *na ordem de integração* $dxdy$.

d) Calcule o integral I.

Resolução 2.1.2. *a) A representação gráfica de* D *apresenta-se na figura 2.9.*

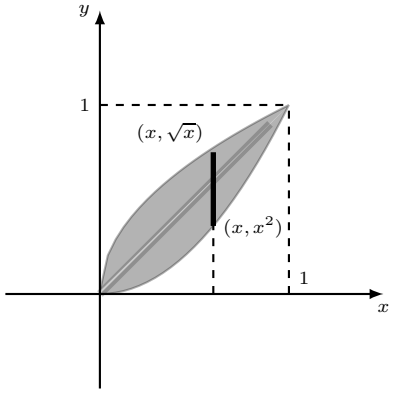


Figura 2.9: Região de Integração D de I

b) Para integrar I *na ordem* $dydx$ *devemos projetar a região de integração* D *de* I *no eixo* Ox, *obtendo assim a variação de* x, *paralelamente a* Oy *e depois para um determinado* $x \in [0,1]$ *traçar uma recta vertical ao eixo* Ox *e passando pelo ponto* $(x,0)$ *e depois ver qual as coordenadas do ponto de entrada dessa recta vertical na região* D *e as coordenadas do ponto de saída da região* D *dessa recta vertical.*

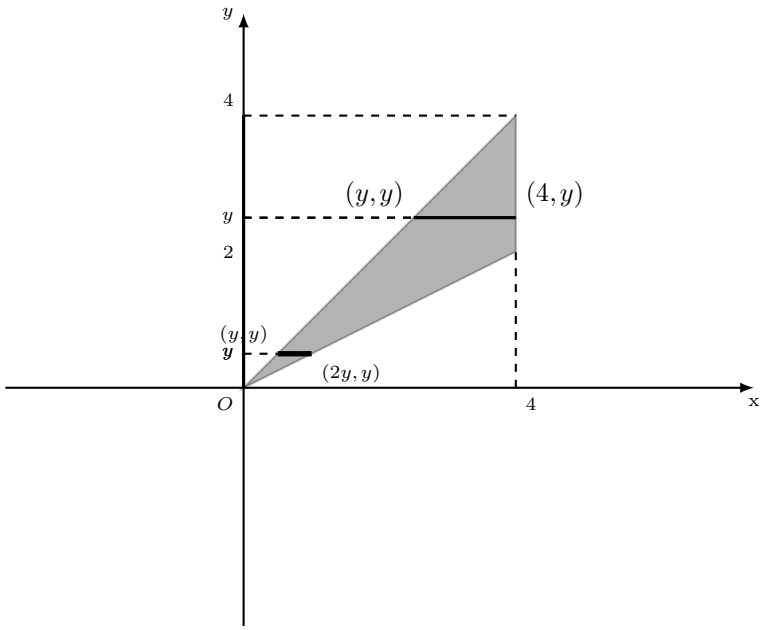


Figura 2.15: Região de integração do exercicío 4.7.5

Assim, tem-se

$$I = \int_0^2 \int_y^{2y} x dx dy + \int_2^4 \int_y^4 x dx dy.$$

c) Mas devemos utilizar a ordem de integração dydx, pois neste o cálculo de I é mais rápido. Assim, concluimos que:

$$I = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{x} x dy dx = \int_0^4 (xy) |_{\frac{x}{2}}^{x} dx$$

$$= \int_0^4 \left(x(x - \tfrac{x}{2})\right) dx = \int_0^4 \left(x^2 - \tfrac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^4 x^2 dx - \int_0^4 \tfrac{x^2}{2} dx = \left(\tfrac{x^3}{3}\right) |_0^4 - \left(\tfrac{x^3}{6}\right) |_0^4$$

$$= \tfrac{64}{3} - \tfrac{64}{6}$$

$$= \tfrac{64}{6} = \tfrac{32}{3}.$$

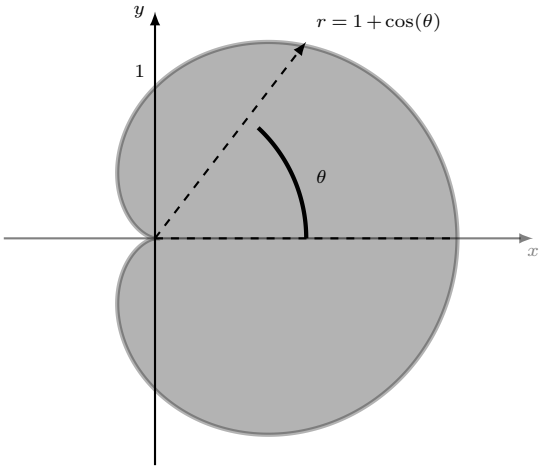


Figura 3.4: Cardioide D

Exercício 3.2.3. *Calcule o integral* $\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx$ *onde*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4\right) \wedge (x \leq y \leq \sqrt{3}x) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0)\}.$$

Resolução 3.2.3. *Como em coordenadas polares a circunferência* $x^2+y^2=1$ *é descrita pela equação* $r=1$*, a circunferência* $x^2+y^2=4$ *é representada pela equação* $r=2$*, a equação da semi-recta* $(y=x) \wedge (x \geq 0)$ *é descrita pela equação* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *e a semi-recta* $y = \sqrt{3}x \wedge x \geq 0$ *é descrita pela equação* $\theta = \frac{\pi}{3}$ *e* $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{|x=r\cos(\theta), y=rsen(\theta)} = \frac{1}{r}$ *então tem-se*

$$I = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \frac{1}{r} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} r|_1^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2-1) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

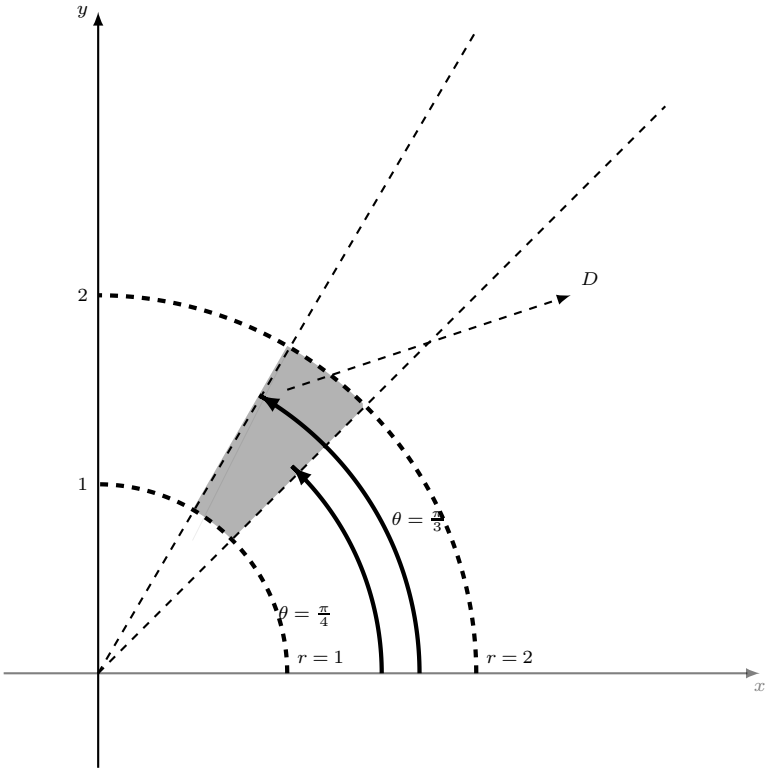


Figura 3.5: Região D

Exercício 3.2.4. *Mostre que* $\int\int_D xdydx = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$, *onde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq y \leq \sqrt{3}x) \wedge (0 \leq x^2+y^2 \leq 1)\}$.

Resolução 3.2.4. *Donde, facilmente vemos pela figura 3.6 que*

$$\int\int_D xdydx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r\cos(\theta) r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r^2 \cos(\theta) dr d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{r^3}{3})|_0^1 \cos(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{3}-0)\cos(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\cos(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{3} sen(\theta)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}.$$

Exercício 3.2.6. *Encontre o volume do sólido delimitado por* $z = 0, x + y = 1, x^2 + y^2 = 1$ *e* $z = 1 - x$.

Resolução 3.2.6. *Assim, como* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (1 - x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}) \wedge (0 \leq z \leq 1 - x\}$ *então o volume da região* W *é igual ao integral duplo extendido à região* D *onde* D *está definido por* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (1 - x \leq y \leq \sqrt{1-x^2})\}$.

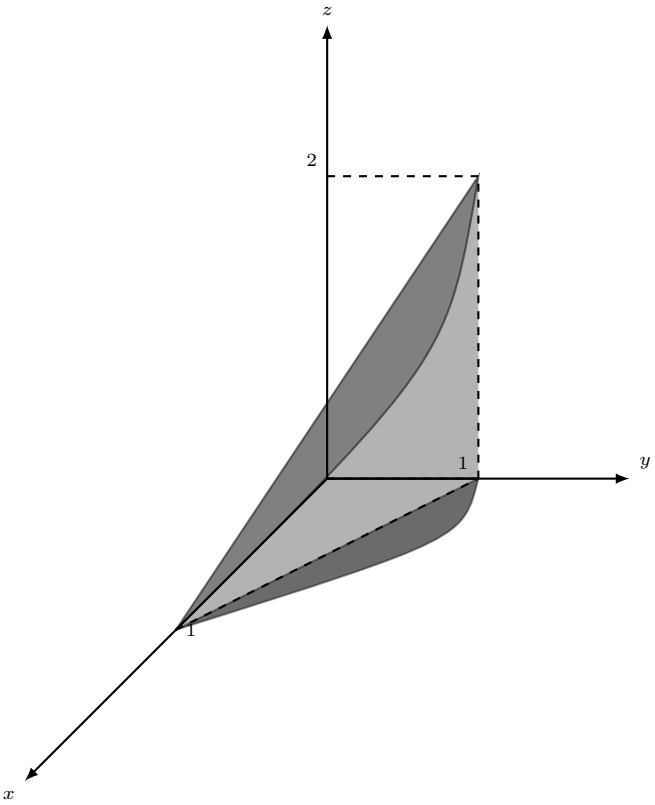


Figura 3.9: Região W

Exercício 3.2.7. *Usando a mudança de coordenadas* $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (u, u+v)$ *calcule o integral* $I = \int_1^3 \int_{x+3}^{x+6} \frac{dydx}{\sqrt{xy-x^2}} dydx$.

Resolução 3.2.7. *Na figura 3.11 apresentamos a região de integração D de I.*

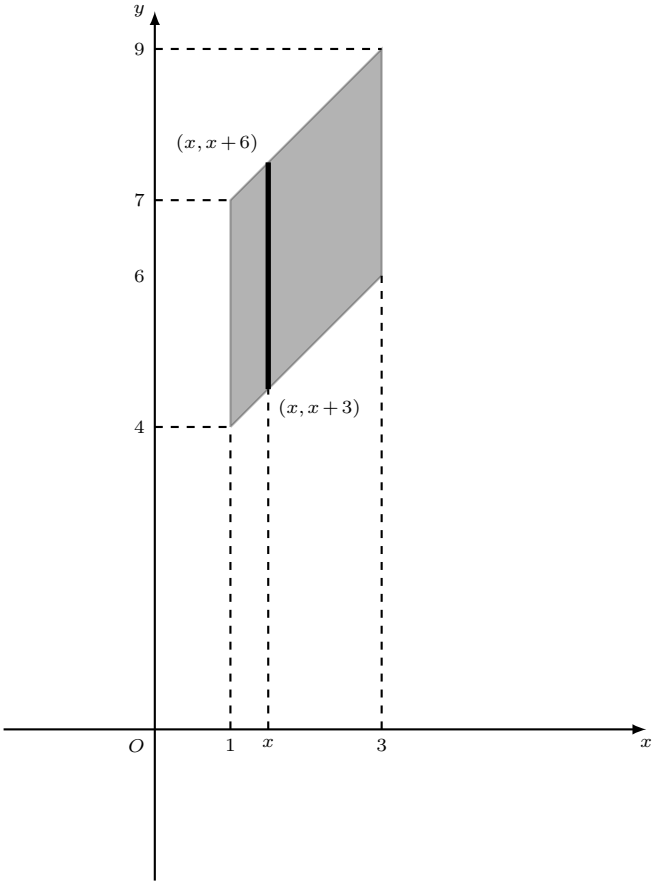


Figura 3.11: Região D

A região de integração D de I é delimitada pelas rectas $x = 1, x = 3, y = x+3$ *e* $y = x+6$. *Analisando a região D representada na figura 3.11 e calculando diretamente*

1.5.2

(a)

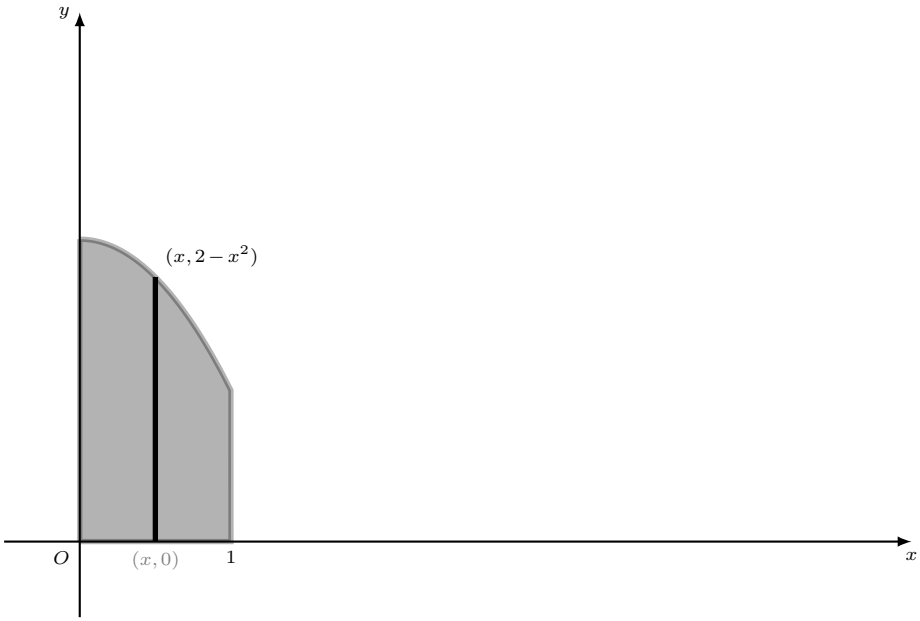


Figura 4.1: Região de Integração do integral 1.5.2a)

(b)

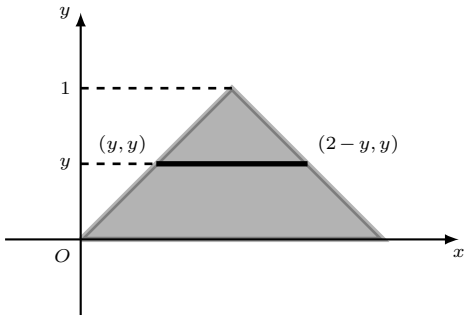


Figura 4.2: Região de integração de 1.5.2b)

(c)

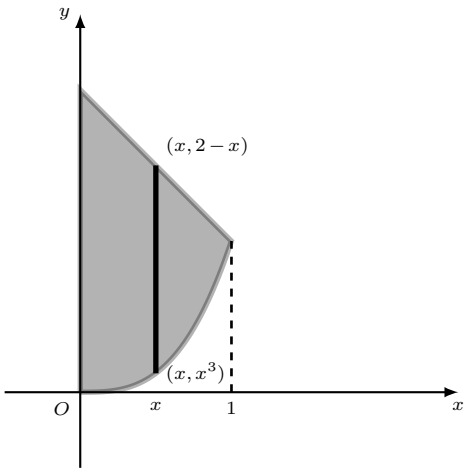


Figura 4.3: Região de integração de 1.5.2*c*)

(d)

Assim, tem-se

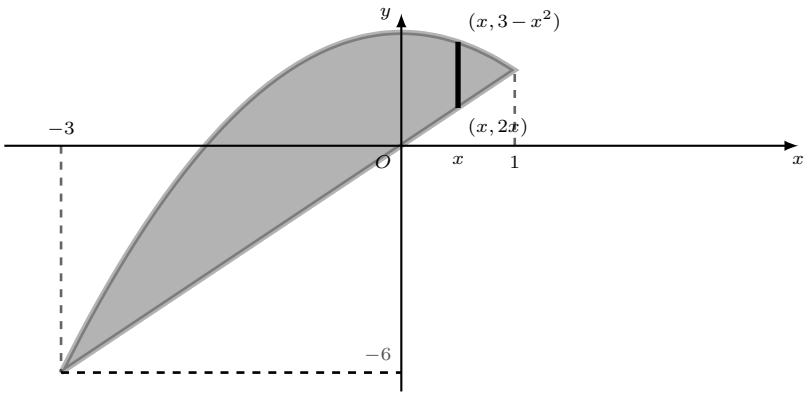


Figura 4.4: Região de integração de 1.5.2*d*)

(e)

Assim, tem-se

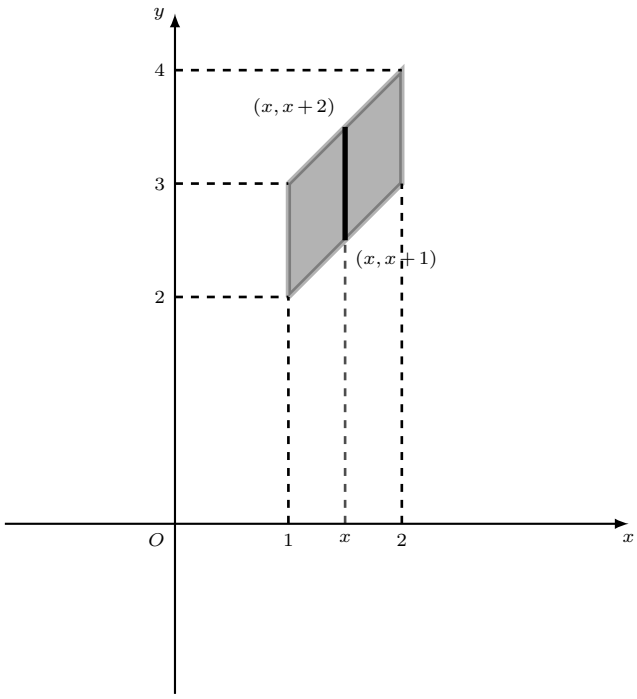


Figura 4.5: Região de integração de 1.5.2*e*)

1.5.3

(a) 1;

(b) $\frac{5}{4}$;

(c) $\frac{1}{3}$;

(d) 2;

(e) $\frac{4}{3}$.

c)

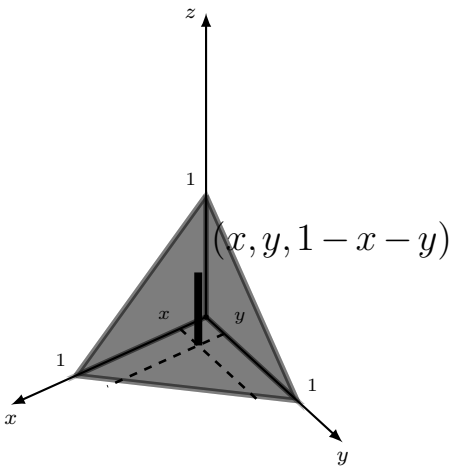


Figura 4.8: Solução de 1.5.4.*c*)

d)

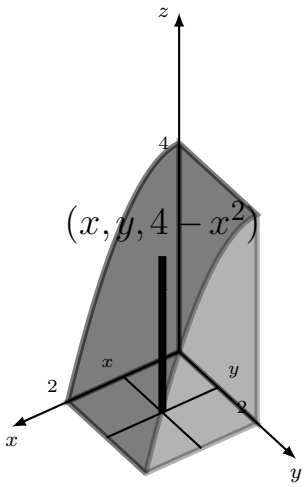
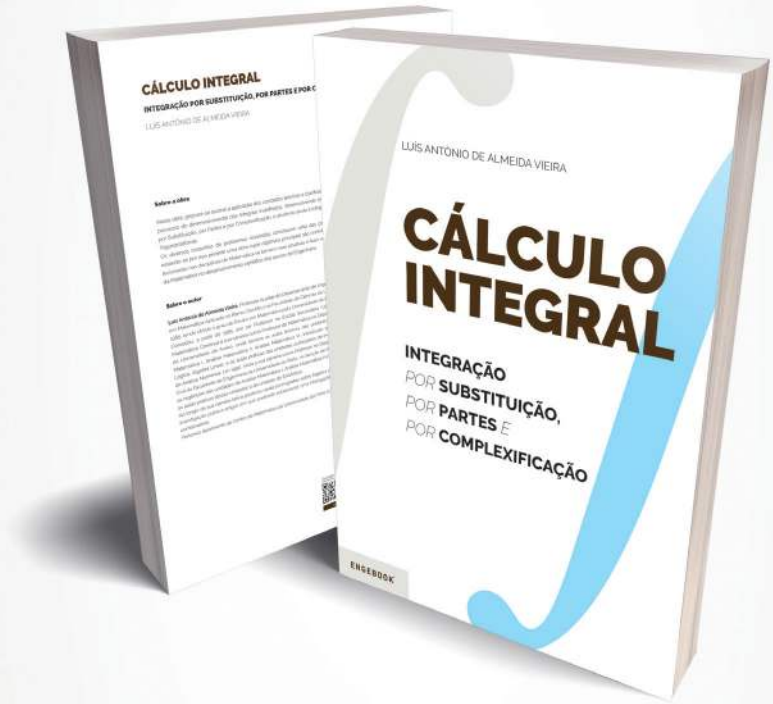


Figura 4.9: Solução de 1.5.4.*d*)

TAMBÉM DISPONÍVEL DO MESMO AUTOR



CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO, POR PARTES E POR COMPLEXIFICAÇÃO

LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

engebook

CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO DUPLA

LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

Sobre a obra

Esta é o segundo livro do autor no âmbito do Cálculo Integral, constituindo uma obra cujos objetivos principais são contribuir para que as matérias leccionadas nas disciplinas de Matemática se tornem mais atrativas e demonstrar ao leitor a necessidade da Matemática no desenvolvimento científico dos alunos de Engenharia. Em particular neste caso, sobre a temática dos Integrais Duplos.

Muitas vezes esta matéria é desenvolvida apresentando a teoria de um modo pouco prático, quase sem exemplos. Neste livro pretende-se apresentá-la de um modo apelativo e baseado em exercícios e exemplos, apresentando desse modo os conceitos necessários para o encadeamento da matéria, que conta neste âmbito com figuras com objetivos pedagógicos no âmbito da Integração Dupla. Este livro consiste assim em três capítulos, sobre a Integração, a Mudança de Ordem de Integração, e a Mudança de Variável, bem como propostas de resolução dos vários exercícios dispostos.

Sobre o autor

Luís António de Almeida Vieira

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil, licenciou-se em Matemática Aplicada no Ramo Científico na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 1985, tendo obtido o grau de Doutor em Matemática pela Universidade de Aveiro em 2004.

Começou, a partir de 1985, por ser Professor na Escola Secundária Clara Resende, lecionando Matemática. Continua a sua carreira como Professor de Matemática no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, onde leciona as aulas teóricas das unidades curriculares de Análise Matemática I, Análise Matemática II, Análise Matemática VI, Introdução à Topologia, Introdução à Lógica, Álgebra Linear, e as aulas práticas das unidades curriculares de Investigação Operacional e de Análise Numérica. Em 1990, inicia a sua carreira como Professor no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, na Secção de Matemática, onde assume as regências das unidades de Análise Matemática I, Análise Matemática II e Álgebra Linear, e leciona as aulas práticas destas unidades e da unidade de Estatística.

Ao longo da sua carreira letiva produziu várias monografias sobre Álgebra de Jordan. Na vertente de investigação publica artigos em que pretende estabelecer uma interligação entre análise, álgebra e combinatória.

Pertence atualmente ao Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP).

Também disponível em formato *e-book*

ISBN: 978-989-892-736-1

www.**engebook**.pt

engebook