



CÁLCULO II

Conceitos, Exercícios e Aplicações

MATLAB®
examples

Ana C. Meira Castro | Ana Júlia Viamonte | António Varejão Sousa

2.^a Edição

Conteúdo

Prefácio	iii
Conteúdo	vii
Notações	ix
1. Funções de várias variáveis reais	1
1.1. Breves noções topológicas	1
1.2. Domínios	4
1.3. Limites	7
1.4. Continuidade	16
1.5. Derivadas parciais	19
1.6. Derivadas de ordem superior	22
1.7. Diferenciabilidade e gradiente	25
1.8. Reta normal e plano tangente	32
1.9. Função composta	34
1.10. Função homogênea	37
1.11. Funções implícitas	40
1.12. Extremos de funções de duas ou mais variáveis	42
1.13. Extremos condicionados de funções de duas ou mais variáveis	46
1.14. Exercícios resolvidos	50
1.14.1. Exercícios resolvidos em MATLAB	66
1.15. Exercícios propostos	70
1.16. Soluções dos exercícios propostos	82
2. Séries de Fourier	97
2.1. Introdução	97
2.1.1. Funções seccionalmente contínuas	98
2.1.2. Funções com paridade ou simetria	102
2.1.3. Funções periódicas	104
2.1.4. Alguns resultados relevantes a considerar	106
2.2. Série de Fourier trigonométrica	107
2.2.1. Aproximação de funções periódicas por séries de funções	107
2.2.2. Série de Fourier na forma trigonométrica	109
2.2.3. Série de Fourier de funções com paridade	113
2.2.4. Convergência da série de Fourier	115
2.2.5. Generalização da série trigonométrica de Fourier	117
2.2.6. Séries de Fourier de funções não periódicas	120
2.2.7. Representação nos domínios tempo e frequência	122
2.2.8. Energia de um sinal	126

2.3.	Série de Fourier exponencial	128
2.3.1.	Números complexos	128
2.3.2.	Forma exponencial da série de Fourier	130
2.4.	Exercícios resolvidos	134
2.4.1.	Exercícios resolvidos em MATLAB	143
2.5.	Exercícios propostos	149
2.6.	Soluções dos exercícios propostos	153
3.	Transformadas de Laplace	161
3.1.	Transformada de Laplace	162
3.2.	Transformada de Laplace inversa	171
3.3.	Transformada de Laplace de derivadas	174
3.4.	Exercícios resolvidos	175
3.4.1.	Exercícios resolvidos em MATLAB	179
3.5.	Exercícios propostos	180
3.6.	Soluções dos exercícios propostos	183
4.	Equações diferenciais	185
4.1.	Classificação de uma equação diferencial	185
4.2.	Solução de uma equação diferencial	188
4.3.	Construção de uma equação diferencial	193
4.4.	Trajetórias ortogonais	195
4.5.	Resolução de um PVI utilizando transformadas de Laplace	197
4.6.	Resolução analítica de EDOs de 1ª ordem	199
4.6.1.	EDOs de variáveis separáveis	199
4.6.2.	EDOs homogêneas	201
4.6.3.	EDOs redutíveis a homogêneas	203
4.6.4.	EDOs totais exatas	205
4.6.5.	EDOs quase exatas	207
4.6.6.	EDOs lineares	209
4.7.	Resolução analítica de EDOs de 2ª ordem	212
4.7.1.	EDOs homogêneas de 2ª ordem e de coeficientes constantes	212
4.7.2.	EDOs não homogêneas de 2ª ordem e de coeficientes constantes	214
4.7.2.1.	Método de Lagrange (da variação das constantes)	214
4.7.2.2.	Método dos coeficientes indeterminados	216
4.7.2.3.	Particularidades da solução de uma EDO linear	217
4.8.	Resolução numérica de uma EDO	218
4.8.1.	Campo de direções	218
4.8.2.	Método de Euler para EDOs de 1ª ordem	220
4.8.3.	Sistemas de EDOs de 1ª ordem	223
4.8.4.	Diagramas de fase	225
4.9.	Método de Euler para sistemas de EDOs	226
4.10.	Exercícios resolvidos	227
4.10.1.	Exercícios resolvidos no MATLAB	242
4.11.	Exercícios propostos	253
4.12.	Soluções dos exercícios propostos	270

5. Integrais múltiplos	281
5.1. Integrais duplos	282
5.1.1. Propriedades do integral duplo	284
5.1.2. Cálculo de integrais duplos em coordenadas retangulares	284
5.1.2.1. 1º Caso - regiões limitadas por retas paralelas aos eixos coordenados	284
5.1.2.2. 2º Caso - regiões quaisquer	286
5.1.3. Interpretação geométrica do integral duplo	290
5.1.4. Aplicação de integrais duplos no cálculo de áreas e volumes	291
5.1.5. Mudança de variável (caso geral)	293
5.1.6. Cálculo de integrais duplos em coordenadas polares	294
5.2. Áreas de superfícies	299
5.3. Integrais triplos	301
5.3.1. Cálculo de integrais triplos em coordenadas retangulares	303
5.3.1.1. 1º Caso - regiões formadas por planos paralelos aos planos coordenados	303
5.3.1.2. 2º Caso - regiões quaisquer	303
5.4. Exercícios resolvidos	308
5.5. Exercícios propostos	317
5.6. Soluções dos exercícios propostos	330
A. Formulário	345
B. Bibliografia	361

Funções de várias variáveis reais

O emprego da palavra "função" como um termo matemático foi iniciado por Leibniz em 1673, mas sofreu uma grande evolução ao longo dos tempos. Uma função de várias variáveis reais permite descrever uma quantidade à custa de outras quantidades, de maneira única. Neste contexto, a grande importância dada às funções deve-se ao facto de elas permitirem construir e modelar os fenómenos dos mais diversos ramos da Ciência e do mundo que nos rodeia.

Definição 1. Função de várias variáveis reais

Diz-se que $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função** de x_1, x_2, \dots, x_n definida em D se, e só se, a qualquer sucessão ordenada $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ corresponde um e um só valor de $y \in \mathbb{R}$. Às variáveis x_1, x_2, \dots, x_n dá-se o nome de **variáveis independentes** ou **argumentos** e a y o nome de **variável dependente**.

1.1. Breves noções topológicas

Definição 2. Distância entre dois pontos

Sejam os pontos $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Chama-se **distância de A a B** ao número não negativo

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2} \quad (1.1)$$

Definição 3. Bola aberta

Sejam $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Chama-se **bola aberta** ou **vizinhança**

de centro em A e raio ε ao conjunto

$$B_\varepsilon(A) = V_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(A, X) < \varepsilon\} \quad (1.2)$$

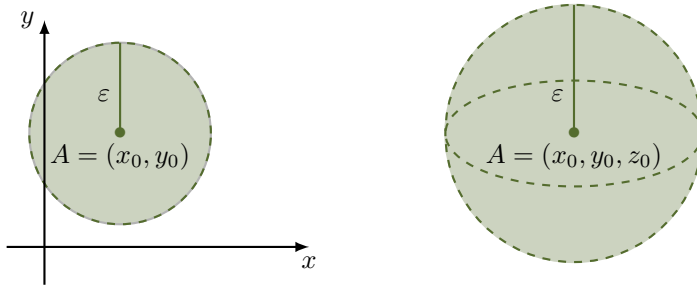


Figura 1.1.: Bola aberta de centro em A e raio ε .

Definição 4. Conjunto limitado

Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se um **conjunto limitado** se existir uma bola aberta, $B_\varepsilon(A)$, que o contenha.

Definição 5. Ponto interior e interior de um conjunto

Considere-se o conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $A \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que A é um **ponto interior** de C se

$$\exists B_\varepsilon(A) : B_\varepsilon(A) \subseteq C \quad (1.3)$$

Ao conjunto dos pontos interiores do conjunto C dá-se o nome de **interior de C** e representa-se por $int(C)$.

Definição 6. Ponto exterior e exterior de um conjunto

Considere-se o conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $A \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que A é um **ponto exterior** de C se

$$\exists B_\varepsilon(A) : C \cap B_\varepsilon(A) = \emptyset \quad (1.4)$$

Ao conjunto dos pontos exteriores do conjunto C dá-se o nome de **exterior de C** e representa-se por $ext(C)$.

Definição 7. Ponto fronteiro e fronteira de um conjunto

Considere-se o conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $A \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que A é um **ponto fronteiro** de C se

$$\forall B_\varepsilon(A) : int(C) \cap B_\varepsilon(A) \neq \emptyset \wedge ext(C) \cap B_\varepsilon(A) \neq \emptyset \quad (1.5)$$

Ao conjunto dos pontos fronteiros do conjunto C dá-se o nome de **fronteira de C** e representa-se por $fr(C)$.

Exemplo 20.

Para a função f definida por $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x, 2) - f(1, 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + x^2 + 4) - (2 + 1 + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + x^2 + (y+h)^2) - (2 + x^2 + y^2)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + x^2 + y^2 + 2hy + h^2 - 2 - x^2 - y^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hy + h^2}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} (2y + h) = 2y$$

Observação 8.

- Considere-se a função $z = f(x, y)$ definida num conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e o ponto $A = (a, b) \in D$. Se se fixar, por exemplo, a variável $y = b$ (b constante) obtém-se uma função $z = f(x, b)$ de apenas uma variável x . Geometricamente, esta situação corresponde a seccionar a superfície $z = f(x, y)$ pelo plano $y = b$. O valor de $f'_x(a, b)$ é o declive da reta do plano $y = b$, tangente à curva $z = f(x, b)$ em $(a, b, f(a, b))$. Em \mathbb{R}^3 , esta reta tem o vetor diretor $(1, 0, f'_x(a, b))$.

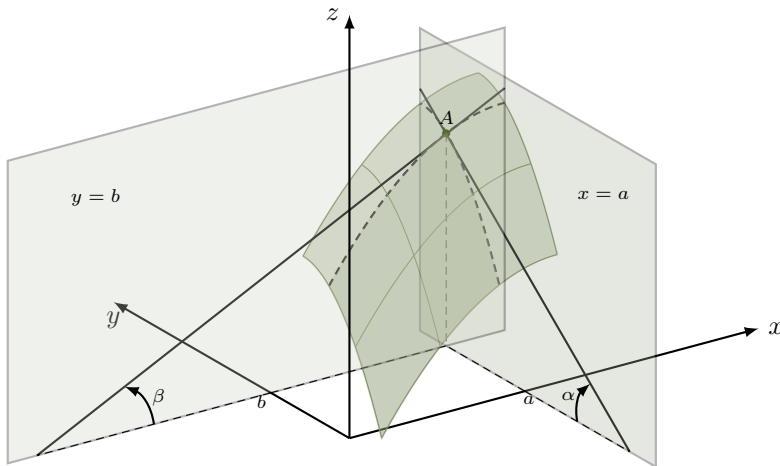


Figura 1.13.: Relação entre as derivadas parciais e a inclinação das retas tangentes às curvas no ponto $A = (a, b, f(a, b))$, resultantes da interseção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados, $x = a$ e $y = b$.

- De acordo com a definição, na determinação de $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ considera-se y fixo. Nestas condições, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, pode-se considerar y constante e derivar $f(x, y)$ em ordem a x pelas regras de derivação já conhecidas. Analogamente, na determinação de $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ considera-se x fixo. Assim, para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$, pode-se considerar x constante e derivar $f(x, y)$ em ordem a y pelas regras de derivação já conhecidas.

1.14. Exercícios resolvidos

Exercício 1. Calcule o domínio das seguintes funções e represente-os graficamente

1. $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x - 2y)}$
2. $f(x, y) = \ln [(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)]$
3. $f(x, y) = \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y}$
4. $f(x, y) = \arccos(2x)$

Resolução.

$$1. D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6 - (2x - 2y) \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x - 3\}$$

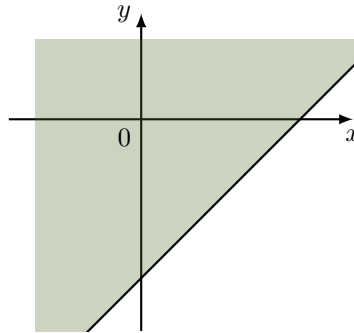


Figura 1.22.: Representação gráfica do domínio de f .

$$\begin{aligned}
 2. D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0\} \\
 &= (16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0 \\
 &= [(16 - x^2 - y^2) > 0 \wedge (x^2 + y^2 - 4) > 0] \\
 &\quad \vee [(16 - x^2 - y^2) < 0 \wedge (x^2 + y^2 - 4) < 0] \\
 &= 16 > x^2 + y^2 > 4 \vee 16 < x^2 + y^2 < 4 \Leftrightarrow 16 > x^2 + y^2 > 4
 \end{aligned}$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 > x^2 + y^2 > 4\}$$

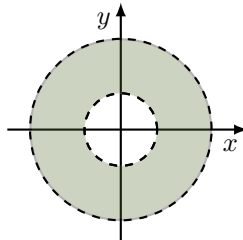


Figura 1.23.: Representação gráfica do domínio de f .

SCRIPT MATLAB 1.6

```

% Classificar e mostrar resultados
subplot(1,2,2); hold on
PC=double(PC);teste=double(teste);
for i=1:size(PC,1),
    plot(PC(i,1),PC(i,2),'r. ');
    if teste(i,3)>0, % classificação
        if teste(i,4)>0,
            text(PC(i,1),PC(i,2),' min', 'FontSize',9);
        else
            text(PC(i,1),PC(i,2),' max', 'FontSize',9);
        end
    elseif teste(i,3)<0,
        text(PC(i,1),PC(i,2),' sela', 'FontSize',9);
    else
        text(PC(i,1),PC(i,2),' ??', 'FontSize',9);
    end
end
end

```

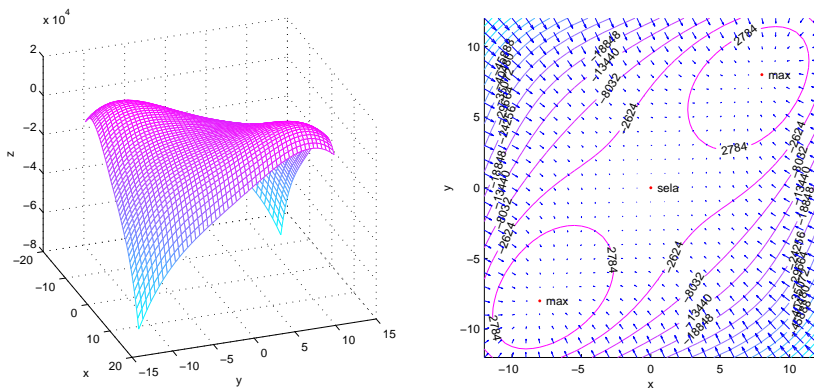


Figura 1.31.: Superfície (esquerda) e curvas de nível (direita) da função real de variáveis reais definida por $f(x, y) = 256xy - x^4 - y^4$, com os extremos apostos sobre o mapa.

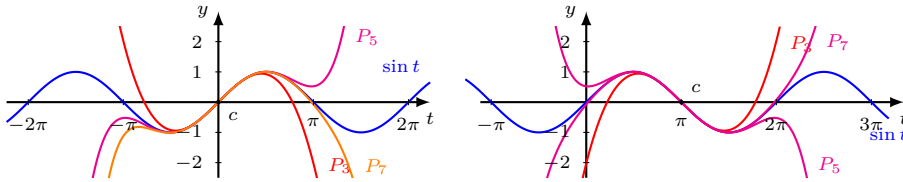


Figura 2.8.: Polinômios de Taylor de grau 3, 5 e 7 de $f(t) = \sin(t)$, em torno de $c = 0$ (esquerda) e $c = \pi$ (direita).

Como se pode observar, aumentando-se o grau do polinômio apenas se melhora a aproximação numa região mais ampla em torno do centro de convergência e deslocando-se o centro da série, apenas se translada a região onde o polinômio aproxima a função.

No caso das funções periódicas, este tipo de aproximação não é de grande utilidade pois não permite uma aproximação global à função e perde-se a sua característica mais básica, a periodicidade. Note-se que as funções típicas em áreas como a ótica, física das ondas, processamento de sinal e imagem, telecomunicações, etc., são periódicas. Esta é a razão para se precisar de uma forma alternativa ao polinômio de Taylor para representar as funções periódicas.

Como a soma de N funções periódicas de período T também é uma função periódica de igual período, a escolha óbvia para a forma da expansão em série de uma função periódica é uma série em que os seus termos também sejam periódicos de igual período.

Recorde-se que se $f(x)$ é uma função periódica de período T , então, $f(kt)$ com $k \in \mathbb{N}$ é uma função periódica de período $\frac{T}{k}$, logo também é periódica de período T .

As funções seno e cosseno são as funções periódicas mais simples e são usadas para modelar fenómenos naturais periódicos, pelo que, para expandir uma função periódica $f(t)$, a escolha natural cai sobre sobre uma série de termos seno e cosseno.

Ainda sem o objetivo de procurar a forma de definir a série de uma dada função, considere-se a série trigonométrica definida exclusivamente por termos de funções cosseno, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n}$, como uma expansão trigonométrica de uma dada função $g(t)$; neste exemplo, incluiu-se o termo n em denominador para que a série verifique a condição necessária de convergência. O gráfico seguinte ilustra a função soma parcial de ordem 5 da série.

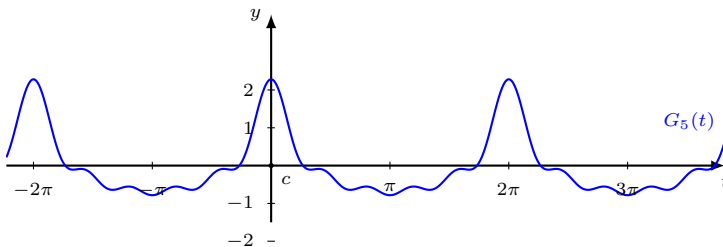


Figura 2.9.: Soma parcial de ordem 5 da série de funções cosseno, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n}$.

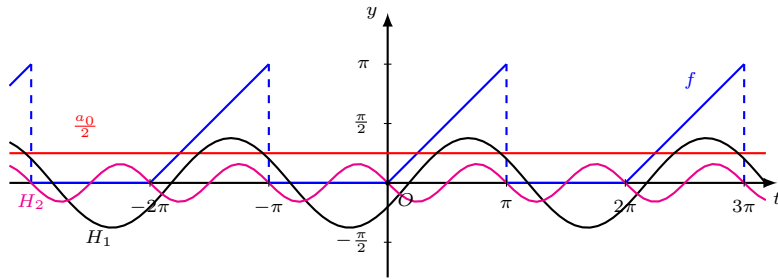


Figura 2.11.: Função f e alguns termos da sua expansão em série de Fourier. $\frac{a_0}{2}$: componente contínua; H_1 : harmónico fundamental; H_2 : 2º harmónico.

Da análise dos gráficos da figura 2.11 constata-se que há um decréscimo acentuado de amplitude do primeiro para o segundo harmónico de f . Esta constatação também é válida para os harmónicos seguintes, pois os coeficientes a_n e b_n são sucessões decrescentes em módulo e convergentes para zero. Tal facto sugere que pode obter-se uma aproximação de f truncando a série ao n ésimo termo. Nesta aproximação comete-se um erro $e_N(t)$ dado pela fórmula

$$e_N(t) = |f(t) - S_N(t)| = \sum_{n=N+1}^{\infty} H_n(t) \quad (2.21)$$

onde $S(t)$ é a função para a qual converge a série de Fourier da função f e $S_N(t)$, a soma parcial da série à ordem N . O erro cometido é tanto menor quanto maior for a ordem de truncatura da série.

O gráfico da figura seguinte mostra a soma parcial de ordem 5 da série de Fourier da função f do exemplo 47.

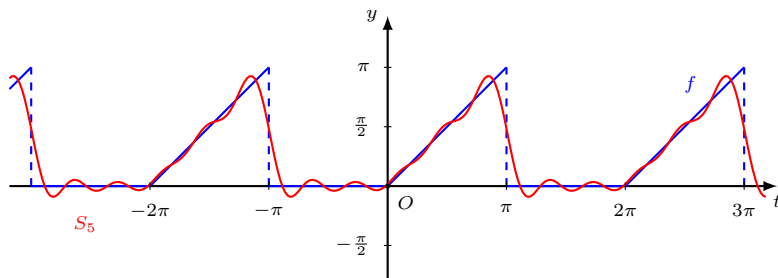


Figura 2.12.: Soma parcial de ordem 5 da série de Fourier de f do exemplo 47.

2.2.3. Série de Fourier de funções com paridade

Se f é uma função par, então, o seu produto com a função seno (ímpar) é uma função ímpar, pelo que se anulam todos os coeficientes b_n (ver a eq. 2.5 na página 103); a série de Fourier resultante é formada apenas por funções cosseno. Neste caso, o

$\tan(\phi_n) = -\frac{b_n}{a_n}$, tem-se $\cos(\phi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ pelo que $\sin(\phi_n) = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$. Sem perda de generalidade, pode associar-se estas grandezas trigonométricas a um triângulo retângulo, como é sugerido na figura seguinte.

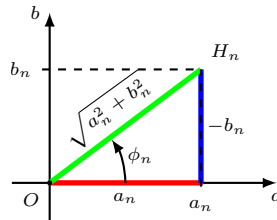


Figura 2.16.: Esquema de representação das grandezas associadas a um harmónico.

Substituindo estes resultados na simplificação anterior do harmónico, obtém-se

$$\begin{aligned} H_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} [\cos(\phi_n) \cos(n\omega_0 t) - \sin(\phi_n) \sin(n\omega_0 t)] \\ &= A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \end{aligned}$$

onde $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ representa a amplitude do harmónico e ϕ_n a sua fase inicial.

Para um sinal complexo, a decomposição em harmónicos é conseguida através da série de Fourier e, ao conjunto de valores de amplitude e fase dos harmónicos chama-se **espectro do sinal** e são uma caracterização alternativa à caracterização temporal.

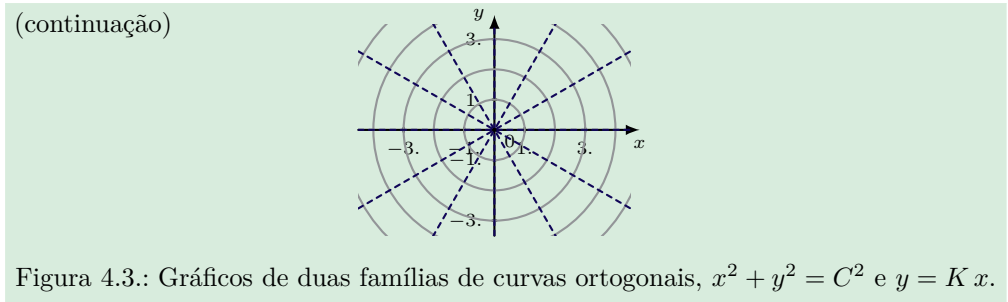
Exemplo 53.

Considere-se os resultados obtidos nos prolongamentos par e ímpar da função do exemplo 52. Os valores para a amplitude e fase são os seguintes

	$f_{par}(t)$	$f_{impar}(t)$
$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} =$	$\begin{cases} \frac{4}{\pi} & \Leftarrow n = 0 \\ \frac{4}{4\pi n^2 - \pi} & \Leftarrow n > 0 \end{cases}$	$\frac{8n}{4\pi n^2 - \pi}$
$\phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) =$	$\begin{cases} 0 & \Leftarrow n = 0 \\ \pi & \Leftarrow n > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} nd & \Leftarrow n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \Leftarrow n = 2, 4, 6, \dots \\ -\frac{\pi}{2} & \Leftarrow n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$

A fase da componente contínua pode tomar o valor 0 ou π (habitualmente considera-se a *determinação principal* para cálculo da fase, isto é, $\phi \in]-\pi, \pi]$). Quando o seu valor é nulo, diz-se que a fase não está definida (nd).

De posse dos parâmetros associados aos harmónicos que compõem um sinal complexo, é habitual proceder-se a uma representação gráfica dessas grandezas em gráficos de barras (pois trata-se de um conjunto discreto de valores), relacionando a amplitude



Na generalidade dos casos, a determinação das trajetórias ortogonais de uma família de curvas passa por

1. definir a equação diferencial associada à família
2. estabelecer a nova equação diferencial que define as trajetórias ortogonais
3. resolver esta última equação diferencial
4. a solução geral forma a respetiva família das trajetórias ortogonais.

4.5. Resolução de um PVI utilizando transformadas de Laplace

Nesta secção, apenas se tratará de problemas de valor inicial (PVI) associados a equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e lineares que, por questão de simplificação de escrita, passar-se-á a designar simplesmente por EDO.

A transformada de Laplace permite resolver um PVI, em que a EDO é linear com coeficientes constantes. O método aplica transformada de Laplace a ambos os membros da EDO, transformando-a numa equação algébrica; a solução da EDO é obtida por transformada de Laplace inversa. Este método segue, pois, as seguintes etapas:

1. aplicar a transformada de Laplace aos dois membros da equação;
2. considerar $Y = \mathcal{L}\{y\}$ (ou $\bar{y} = \mathcal{L}\{y\}$) e obter a equação subsidiária;
3. resolver a equação auxiliar em ordem a Y (ou a \bar{y}) ;
4. com a transformada inversa determinar $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$ (ou $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}\}$) .

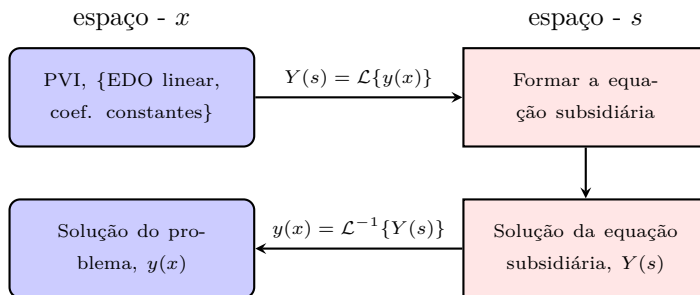


Figura 4.4.: Esquema do método de resolução de EDOs através da transformada de Laplace.

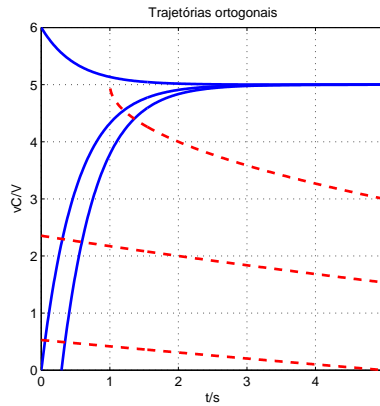


Figura 4.13.: Alguns elementos das famílias ortogonais.

3. Quando o comutador passa para a posição 2 tem-se um circuito RLC, sendo regido pela equação diferencial $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = 0$, com $i = \frac{dq}{dt}$.
- a) Substituindo $i = \frac{dq}{dt}$ na EDO, tem-se uma equação diferencial linear de 2ª ordem de coeficientes constantes, $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$, cuja solução geral se obtém através do *script* seguinte.

SCRIPT MATLAB 4.9

```

% 3.a) Comutador em 2: circuito RLC
disp('Circuito RLC');
s1='q(t)='; % apenas para formatar a saída
s2='i(t)='; % idem
edo3 = L*dif(q,2)+R*dif(q)+q/C==0;
sg2=dsolve(edo3);
disp('Solução Geral');
disp(['EDO: ' char(edo3)])
disp({'[s1 char(sg2)]'}); % solução geral da EDO

```

A solução geral é

$$q(t) = C_1 e^{t \left(\frac{\sqrt{CR^2 - 4L} - R}{2L\sqrt{C}} - \frac{R}{2L} \right)} + C_2 e^{-t \left(\frac{\sqrt{CR^2 - 4L} + R}{2L\sqrt{C}} + \frac{R}{2L} \right)}$$

Repare-se que o argumento das funções exponenciais desta solução geral pode assumir valores complexos para determinados valores de C , R e L . A situação que se apresenta na alínea seguinte é uma dessas situações.

- b) Este PVI tem condições iniciais, $v_C(0) = 5$, pelo que $q(0) = C v_C(0)$, sendo nula a corrente no instante inicial, isto é, $i(0) = 0$. O *script* seguinte adapta os valores para o circuito RLC em estudo e resolve a equação resultante.

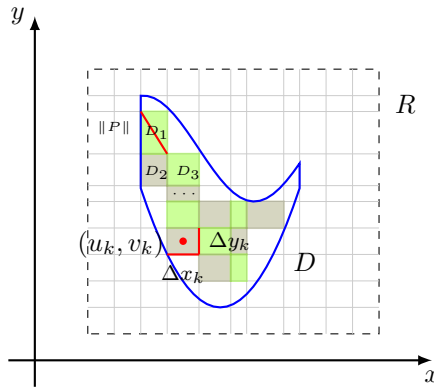


Figura 5.2.: Partição interior de D .

- Se a região R é dividida em n retângulos como na figura, então a coleção de todas as subregiões retangulares fechadas que estão completamente contidas em D constitui uma partição interior P de D . Se se representar essas subregiões por D_1, D_2, \dots, D_n , essa partição interior de D denota-se por $\{D_k\}$.
- O comprimento da maior diagonal de todas as subregiões D_k é a norma $\|P\|$ da partição.
- A área de cada subregião D_k é dada por $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

Se para cada k se escolher um ponto arbitrário (u_k, v_k) em D_k então, pode-se definir as somas de Riemann como se segue:

Definição 88. Soma de Riemann

Seja $f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais definida num domínio D e seja $P = \{D_k\}$ uma partição interior de D . Chama-se **soma de Riemann** de f para P a qualquer soma da forma

$$\sum_k f(u_k, v_k) \Delta A_k = \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k \Delta y_k \tag{5.5}$$

em que (u_k, v_k) é um ponto de D_k e ΔA_k é a área de D_k .

Definição 89. Integral duplo e domínio de integração

Seja f uma função contínua de duas variáveis definida num domínio D . Chama-se **integral duplo** no domínio D (ou região de integração D) a

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k, v_k) \Delta A_k \tag{5.6}$$

desde que o limite exista; D chama-se *domínio de integração* e f , *função integranda*. O diferencial dA designa-se elemento de área, $dA = dx dy = dy dx$.

5.1.2.2. 2º Caso - regiões quaisquer

Definição 91. Domínio do tipo I em \mathbb{R}^2

Chama-se *domínio do tipo I* em \mathbb{R}^2 (D_x ou regular segundo o eixo das ordenadas) à região definida por

$$D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \tag{5.10}$$

onde $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são funções contínuas $\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ com $f_1(x) \leq f_2(x)$ e onde qualquer reta vertical contida em D intersesta f_1 e f_2 apenas uma vez.

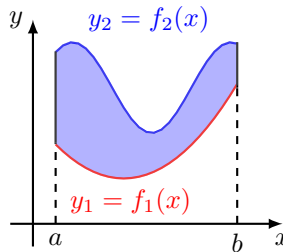


Figura 5.3.: Domínio D_x ou tipo I - região projetada sobre o eixo das abcissas.

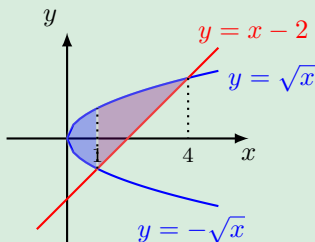
Teorema 29. *Seja D um domínio (região) do tipo I, limitada pelos gráficos f_1 e f_2 . Admitindo-se que a função f está definida e limitada em D e que é contínua no seu interior, então o integral duplo $\iint_D f(x, y) dA$ existe e pode ser calculado mediante integração uni-dimensional iterada*

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \tag{5.11}$$

Exemplo 98.

Escrever os limites de integração a considerar no integral $\iint_D f(x, y) dydx$, sendo D a região limitada pela parábola $y^2 = x$ e reta $y = x - 2$.

Por projeção sobre o eixo das abcissas, isto é, fixando a variável x , tem-se que o domínio de integração pode ser dividido em duas regiões do tipo I. As curvas que limitam superiormente e inferiormente cada região têm que ser funções em x , por isso, tem-se $y^2 = x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$.



$$\begin{aligned} I : \quad & x = y^2 \wedge y = x - 2 \\ & x = (x - 2)^2 \\ & x^2 - 5x + 4 = 0 \\ & x = 1 \vee x = 4 \end{aligned}$$

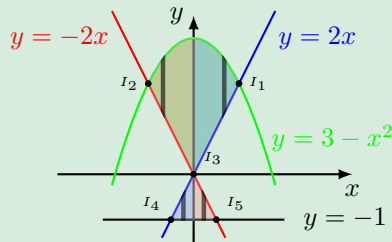
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dydx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dydx$$

(continuação)

- Determinação dos pontos de interseção das curvas que vão permitir encontrar as diferentes subregiões de D .

$$\begin{array}{ll}
 I_1: & 2x = 3 - x^2 \\
 & 0 = x^2 + 2x - 3 \\
 & x = -3 \vee x = 1 \quad I_1(1, 2) \\
 I_2: & -2x = 3 - x^2 \\
 & 0 = x^2 - 2x - 3 \\
 & x = 3 \vee x = -1 \quad I_2(-1, 2) \\
 I_3: & 2x = -2x \\
 & x = 0 \quad I_3(0, 0) \\
 I_4: & 2x = -1 \\
 & x = -\frac{1}{2} \quad I_4(-\frac{1}{2}, -1) \\
 I_5: & -2x = -1 \\
 & x = \frac{1}{2} \quad I_5(\frac{1}{2}, -1)
 \end{array}$$

- Percorrendo D segundo “fatias elementares” verticais, constata-se existirem 4 subregiões D_x , isto é, do tipo I



pelos que, a expressão integral estendida a toda a região de integração é

$$\iint_D dx dy = \int_{-1}^0 \int_{-2x}^{3-x^2} dy dx + \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{-1}^{2x} dy dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{-2x} dy dx$$

- Termina-se com o cálculo do integral

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^0 \int_{-2x}^{3-x^2} dy dx + \int_0^1 \int_{2x}^{3-x^2} dy dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{-1}^{2x} dy dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{-2x} dy dx \\
 &= \int_{-1}^0 [y]_{-2x}^{3-x^2} dx + \int_0^1 [y]_{2x}^{3-x^2} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 [y]_{-1}^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} [y]_{-1}^{-2x} dx \\
 &= \int_{-1}^0 (3 - x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (3 - x^2 - 2x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x + 1) dx + \\
 & \quad + \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x + 1) dx \\
 &= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 + \left[3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 + [x^2 + x]_{-\frac{1}{2}}^0 + [-x^2 + x]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= [0 - (-3 + \frac{1}{3} + 1)] + [(3 - \frac{1}{3} - 1)] + [0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})] + [(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - 0] \\
 &= \frac{23}{6}
 \end{aligned}$$

5.1.3. Interpretação geométrica do integral duplo

Seja S o gráfico de uma função contínua f tal que $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$. Seja Q o sólido situado abaixo de S e sobre D .

Se $P_k(u_k, v_k, 0)$ é um ponto na sub-região D_k numa partição interior P de D , então $f(u_k, v_k)$ corresponde à distância do ponto B_k em S ao plano xOy .

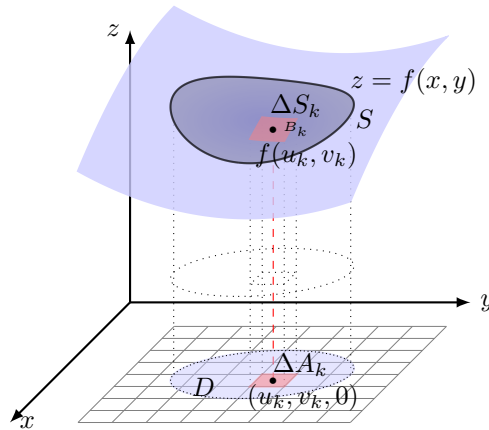


Figura 5.5.: Significado geométrico dos termos de um integral duplo.

Desta representação conclui-se que a área da região D é dada por

$$A = \iint_D dx dy \tag{5.14}$$

O produto $f(u_k, v_k) \Delta A_k$ (ou, equivalentemente, $f(u_k, v_k) \Delta x_k \Delta y_k$) corresponde ao volume do prisma de base retangular de área ΔA_k e altura $f(u_k, v_k)$. A soma dos volumes de todos os prismas traduz uma aproximação do volume de V de Q .

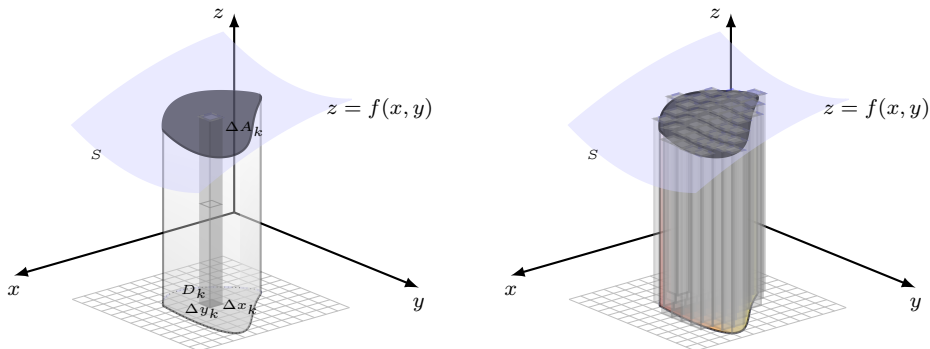


Figura 5.6.: Interpretação geométrica do integral duplo.

Uma vez que esta aproximação é tanto melhor quanto mais reduzida é a norma da

5.2. Áreas de superfícies

Seja $f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais, com derivadas parciais contínuas em D e $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$. Seja S a porção da representação gráfica de f , cuja projeção sobre o plano xOy é D e $P = \{D_i\}$ uma partição interior de D onde as dimensões do retângulo D_i são Δx_i e Δy_i . Seja, ainda, $(x_i, y_i, 0)$ um ponto em cada retângulo D_i e $B_i = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ um ponto correspondente em S .

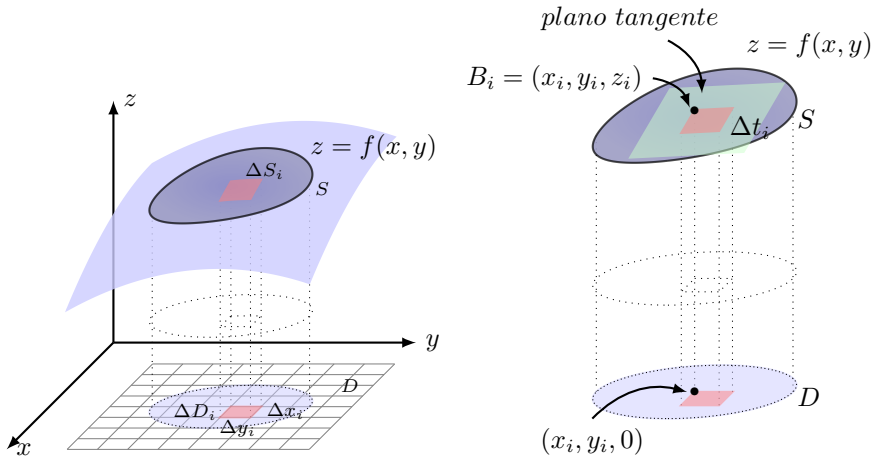


Figura 5.11.: Partições de uma superfície.

Considere-se o plano tangente a S no ponto B_i e Δt_i a área do paralelogramo contido neste plano tangente e cuja projeção sobre o plano xOy é o retângulo D_i . Seja o ponto $(x_i, y_i, 0)$ do vértice do retângulo D_i mais próximo da origem e sejam \vec{u} e \vec{v} vetores que emergem do ponto B_i e que se apoiam nos dois lados do paralelogramo anteriormente considerado.

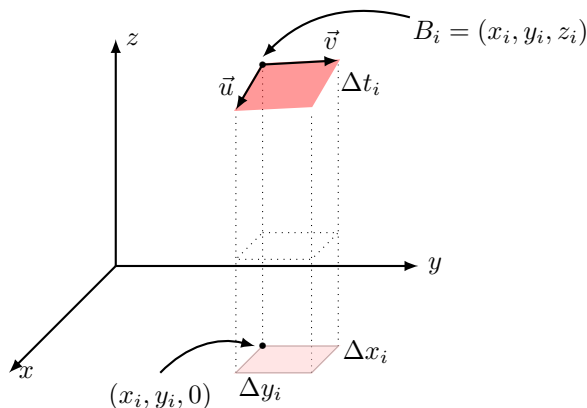


Figura 5.12.: Determinação da área de um elemento da superfície.

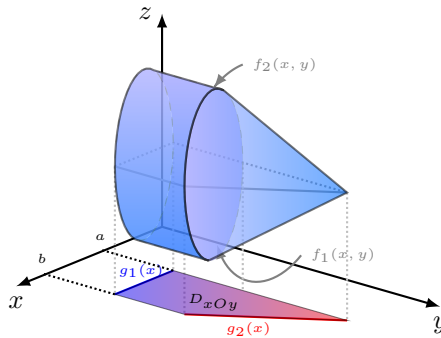


Figura 5.14.: Domínio de tipo I - região projetada sobre o plano xOy .

Se D_{xOy} é uma região fechada do tipo I ou do tipo II em \mathbb{R}^2 ou subordinável em regiões desses tipos e se f é uma função contínua em W , então a noção de integral iterado também se pode estender aos integrais triplos pelo que, se f é aí integrável fica

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{D_{xOy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx dy \quad (5.30)$$

Assim, por exemplo, se D_{xOy} é uma região do tipo I em \mathbb{R}^2 onde $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ e $a \leq x \leq b$ tem-se o integral totalmente iterado com a seguinte forma

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz dy dx \quad (5.31)$$

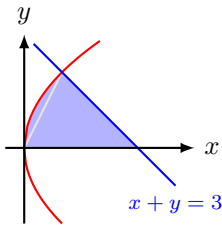
De seguida apresentam-se os restantes domínios do tipo II e III em \mathbb{R}^3 , mantendo-se o mesmo processo de resolução iterada ao já apresentado para os domínios do tipo I.

Definição 97. Domínio do tipo II em \mathbb{R}^3

Chama-se *domínio do tipo II* em \mathbb{R}^3 à região

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_{xOz} \wedge g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\} \quad (5.32)$$

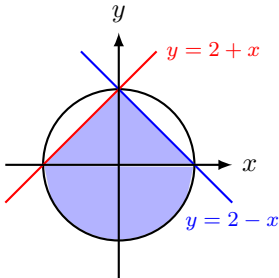
onde D_{xOz} é a região do plano correspondente à projeção de W sobre o plano xOz , g_1 e g_2 são funções contínuas em D_{xOz} e tem-se $g_1(x, z) \leq g_2(x, z)$, $\forall (x, z) \in D_{xOz}$.



Neste caso, é mais fácil fixar primeiro o y

$$A = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{y-3} dx dy$$

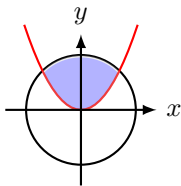
b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq 2 - x \wedge y \leq 2 + x\}$



Neste caso, é mais fácil fixar primeiro o x

$$A = \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2+x} dy dx + \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2-x} dy dx$$

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y \geq x^2\}$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Neste caso, é mais fácil fixar primeiro o x

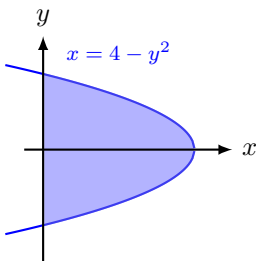
$$A = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dx dy$$

■

Exercício 51.

Calcule a área plana representada a sombreado

a)

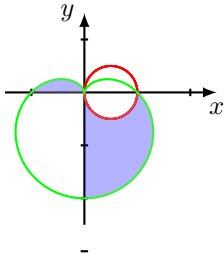


Neste caso, é mais fácil fixar primeiro o y

$$4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -2$$

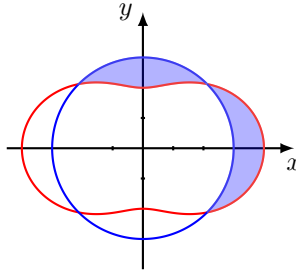
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dx dy = \int_{-2}^2 [x]_0^{4-y^2} dy \\ &= \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

(g)



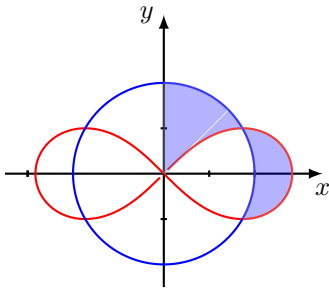
(1) : $\rho = 1 - \sin(\theta)$
 (2) : $\rho = \cos(\theta)$

(h)



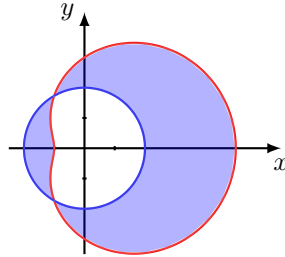
(1) : $\rho = 3 + \cos(2\theta)$
 (2) : $\rho = 3$

(i)



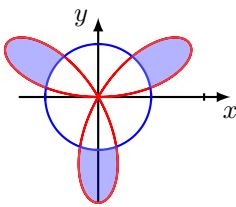
(1) : $\rho^2 = 8 \cos(2\theta)$
 (2) : $\rho = 2$

(j)



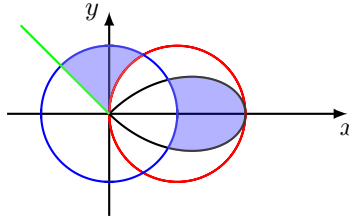
(1) : $\rho = 3 + 2 \cos(\theta)$
 (2) : $\rho = 2$

(k)



(1) : $\rho = 2 \sin(3\theta)$
 (2) : $\rho = 1$

(l)



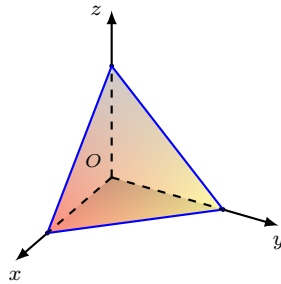
(1) : circunferência $C(0,0)$, $r = 1$
 (2) : $y = -x$
 (3) : circunferência $C(1,0)$, $r = 1$
 (4) : $\rho = 2 \cos(2\theta)$

5. Calcule a área das seguintes superfícies

- esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ contida entre $z \geq 0$ e os cilindros $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
- paraboloide $z + 1 = x^2 + y^2$ contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$

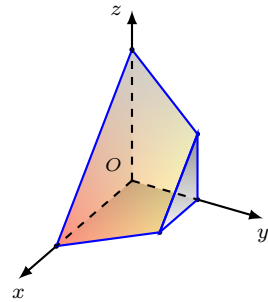
6. Calcule os volumes dos seguintes sólidos

(a)



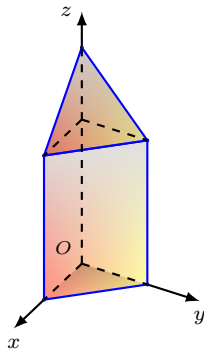
Planos coordenados
 $x + y + z = 1$

(b)



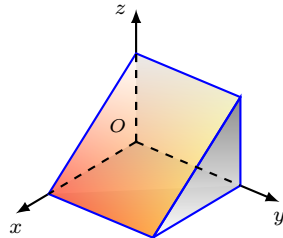
Planos coordenados
 $x + y + z = 1$
 $y = \frac{1}{2}$

(c)



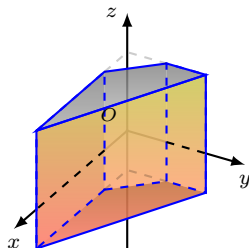
Planos coordenados
 $x + y = 1$
 $x + y + z = 3$

(d)



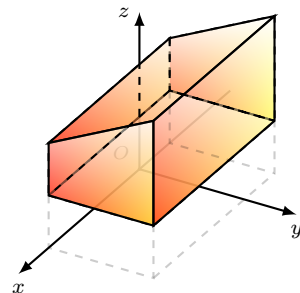
Planos coordenados
 $y = 4$
 $3x + 4z = 12$

(e)



$x = 0$ e $y = 0$
 $x + y = 1$
 $x + 2y = 4$
 $z = 2$ e $z = -1$

(f)



$2z - y = 4$
 $z = 1$
 $x = -1$ e $x = 3$
 $y = 0$ e $y = 2$

Cônicas

Uma cônica ou secção cônica é o lugar geométrico definido pela interseção de um cone com um plano. Na figura A.1 ilustram-se algumas curvas resultantes da interseção de um cone com diferentes planos.

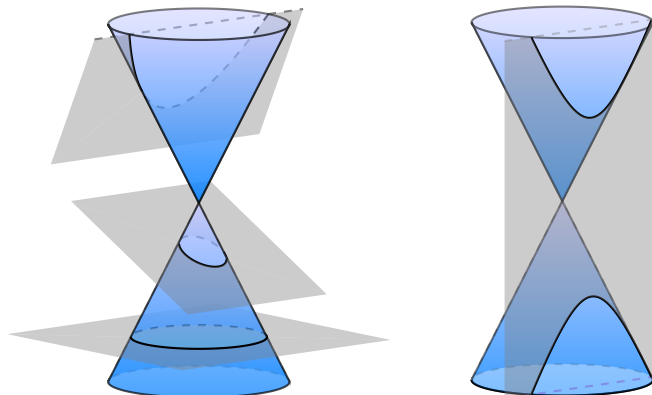


Figura A.1.: Secções cónicas. De cima para baixo e esquerda para direita: parábola, elipse, circunferência e hipérbole, respetivamente.

A equação geral de uma cônica é

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{A.1})$$

com $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ e A, B e C não simultaneamente nulos.

O tipo de cônica pode ser identificado a partir do parâmetro $B^2 - 4AC$.

Assim, se

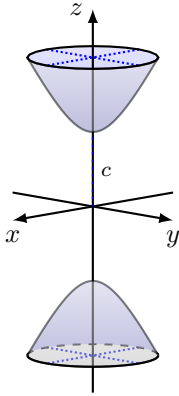
- $B^2 - 4AC < 0$ a equação A.1 representa uma elipse
- $B^2 - 4AC = 0$ representa uma parábola
- $B^2 - 4AC > 0$ representa uma hipérbole

Os casos mais simples são aqueles em que os eixos de simetria são paralelos aos eixos coordenados. Nestes casos, a equação A.1 assume representações simplificadas, cujos parâmetros têm significado geométrico de simples interpretação. Nos restantes casos têm-se cónicas com eixos de simetria rodados em torno do seu centro ou cónicas degeneradas.

De seguida apresentam os casos mais simples, isto é, equações das cónicas com eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.

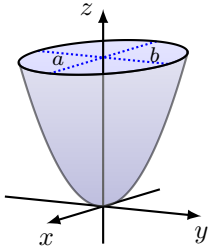
Gráfico

Quádrica



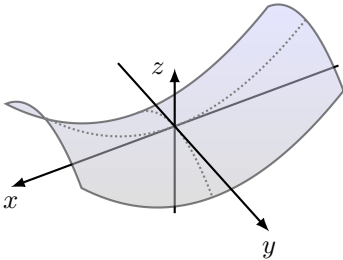
Hiperbolóide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



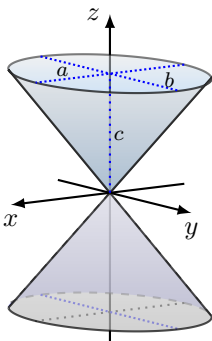
Parabolóide elítico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$



Parabolóide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$



Cone

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

CÁLCULO II MATLAB® *examples*

Conceitos, Exercícios e Aplicações

2.ª Edição

Ana C. Meira Castro
Ana Júlia Viamonte
António Varejão Sousa

Sobre a obra

Este livro pretende fornecer aos estudantes dos cursos de Engenharia um texto que seja, simultaneamente, elementar e rigoroso e que lhes permita aprender os conceitos básicos do cálculo infinitesimal e as suas aplicações. Este livro vem no seguimento do livro **Cálculo I – Conceitos, Exercícios e Aplicações** e pretende estender os conhecimentos então estudados a funções com mais do que uma variável.

Conscientes da vastidão de possíveis caminhos a seguir na apresentação das matérias, os autores optaram por seguir uma sequência simples que tivesse em linha de conta os atuais ajustes dos objetivos da unidade curricular em que esta temática se enquadra, face à atual tendência para a diminuição dos tempos letivos e incentivo à utilização de *software*. Neste sentido, este livro está organizado em cinco capítulos, ao longo dos quais se procurou obedecer a uma estrutura evolutiva em torno do rigor e da formalidade, mas sem excessos de nomenclatura.

No primeiro capítulo estudam-se as funções reais de variáveis reais, o segundo capítulo incide sobre o estudo das séries de Fourier, o terceiro capítulo destina-se às transformadas de Laplace, no quarto capítulo apresentam-se métodos de resolução de equações diferenciais e, por último, o quinto capítulo destina-se ao cálculo integral.

Em cada um deles, é proporcionado um conjunto de exercícios variados e não repetitivos, em número suficiente e equilibrado, apresentando-se alguns deles já resolvidos, propondo-se outros para resolução e ilustrando algumas aplicações práticas de integração de conhecimentos, recorrendo a *software* de cálculo algébrico e numérico.

Sobre os autores

Os autores são docentes do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia (ISEP)

Ana C. Meira Castro é doutorada em Ciências de Engenharia e investigadora no CERENA – Centro de Investigação em Recursos naturais e Ambiente na área de geoambiente. Os seus principais interesses focam aquisição e análise de dados, modelação e análise de risco

Ana Júlia Viamonte é doutorada em Ciências, área de Matemática e área específica de Álgebra Linear Numérica e investigadora no LEMA – Laboratório de Engenharia Matemática do ISEP na área de didática do ensino da matemática e álgebra linear numérica.

António Varejão Sousa é doutorado em Ciências de Engenharia e investigador no INEB – Instituto de Engenharia Biomédica na área de processamento e análise de imagem biomédica. Os seus principais interesses focam o processamento e análise de dados.

Também disponível em formato e-book



ISBN: 978-989-723-172-8



9 789897 231728

www.engebook.pt

engebook