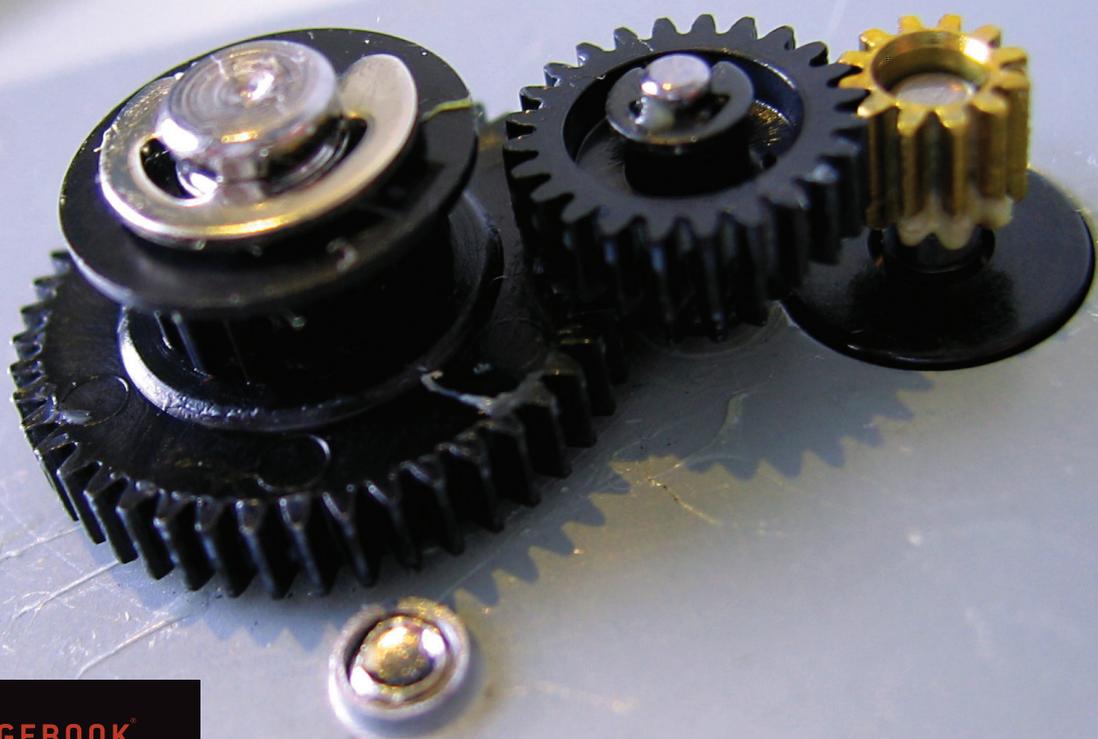


PAULO FLORES  
JOSÉ GOMES

# CINEMÁTICA E DINÂMICA DE ENGRENAGENS

TEORIA E EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO



*Autores*  
Paulo Flores  
José Gomes

*Título*  
Cinemática e Dinâmica de Engrenagens: Teoria e Exercícios de Aplicação

*Editora*  
Publindústria, Edições Técnicas  
Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO  
www.publindustria.pt

*Distribuidor*  
Engebook - Conteúdos de Engenharia e Gestão  
Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871  
E-mail: apoiocliente@engebook.com · www.engebook.com

*Revisão*  
Ana Catarina Pinho

*Design*  
Luciano Carvalho

*Impressão*  
Service Point  
Agosto, 2015

*Depósito Legal*  
394629/15



A cópia legal viola os direitos dos autores.  
Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2015 | Publindústria, Produção de Comunicação, Lda.  
Todos os direitos reservados a Publindústria, Produção de Comunicação, Lda.  
Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio, seja eletrónico, mecânico, de fotocópia, de gravação ou outros sem autorização prévia por escrito do autor.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.  
Para uma maior coerência ortográfica, e nos casos em que esta situação se verifique, converteram-se todos os textos transcritos à nova ortografia, independentemente de a edição original ser ou não anterior à adoção do novo Acordo Ortográfico.

CDU  
621.8 Engrenagens

ISBN  
978-989-723-136-0 (Papel)  
978-989-723-137-7 (E-book)

Engebook - Catalogação da publicação  
Família: Engenharia Mecânica  
Subfamília: Construções Mecânicas

# PREFÁCIO

Os sistemas que produzem trabalho mecânico muito frequentemente incorporam engrenagens como órgãos de redução ou multiplicação de velocidade e transmissão de binário. As engrenagens são compactas, são aplicáveis para uma larga gama de potências transmitidas e de relações de transmissão, têm boa precisão de transmissão e têm uma vida longa. São órgãos de geometria relativamente complexa, o que torna exigente e difícil a análise do seu funcionamento.

São muito escassos os livros em português sobre este tema, escritos por autores portugueses. É, por isso, muito bem-vindo este livro sobre cinemática e dinâmica de engrenagens. Os seus autores têm uma longa experiência universitária de ensino deste tema e de temas afins. O interesse e a qualidade da obra são indiscutíveis: os tópicos tratados são incontornáveis para a aquisição e consolidação de conhecimentos neste domínio; os temas são tratados com profundidade adequada e, aqui e ali, condimentados com breves referências a assuntos correlacionados não diretamente abordados no livro; a exposição é clara e apoiada numa excecional componente gráfica; os problemas propostos e resolvidos são uma ajuda relevante para a compreensão dos assuntos tratados; a apresentação de um extenso suporte bibliográfico aponta ao leitor caminhos para o alargamento do seu conhecimento.

Os leitores interessados encontrarão aqui explicações claras-para conceitos que são frequentemente mal assimilados pelos iniciados no estudo destes temas. Refiro a título de exemplo, e a este propósito, os conceitos relacionados com a *continuidade do engrenamento*, e a discussão da articulação entre a *relação de condução*, a capacidade de carga, a ocorrência de interferências e a vida ao desgaste dos dentes das engrenagens. Também a maior complexidade de algumas engrenagens torna mais difícil a análise das forças atuantes nos dentes durante a transmissão. Porém, é indispensável uma análise correta e completa destas forças para o cálculo dos dentes da engrenagem, mas também para o cálculo dos veios em que as rodas estão montadas e dos seus apoios.

Esta obra dirige-se principalmente a professores e estudantes do ensino superior, mas todos os que se dedicam a este tema encontrarão nela fortes motivos de interesse.

A. Sousa Miranda

25 de junho de 2015

Professor Catedrático Aposentado

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade do Minho

Esta obra é dedicada ao Professor Doutor António Augusto Sousa Miranda, verdadeiro mentor, que sempre ensina e aconselha o cumprimento da maior e mais nobre missão: ser professor!

# ÍNDICE

<b>PREFÁCIO</b> .....	V
<b>1. ASPETOS GERAIS SOBRE ENGRENAGENS</b>	
1.1. Introdução.....	1
1.2. Breve Resenha Histórica .....	7
1.3. Classificação das Engrenagens .....	9
1.4. Nomenclatura Fundamental.....	18
1.5. Geração de Perfis de Dentes.....	25
1.6. Dentado em Evolvente de Círculo.....	31
1.7. Princípio Fundamental do Engrenamento.....	38
1.8. Revisão de Conhecimentos.....	43
1.9. Referências Bibliográficas.....	45
<b>2. ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS</b>	
2.1. Introdução.....	47
2.2. Relações Geométricas.....	50
2.3. Continuidade do Engrenamento.....	58
2.4. Relação de Condução.....	63
2.5. Escorregamento.....	69
2.6. Rendimento.....	82
2.7. Interferências.....	88
2.8. Revisão de Conhecimentos.....	95
2.9. Referências Bibliográficas.....	97
<b>3. ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES INCLINADOS</b>	
3.1. Introdução.....	99
3.2. Geração do Dente.....	104
3.3. Nomenclatura.....	107
3.4. Relações Geométricas.....	110
3.5. Parâmetros de Desempenho.....	117
3.6. Traçado Aproximado de Tredgold.....	123
3.7. Rodas Cruzadas .....	126
3.8. Revisão de Conhecimentos.....	133
3.9. Referências Bibliográficas.....	136

<b>4. ENGRENAGENS CÔNICAS</b>	
4.1. Introdução.....	137
4.2. Geração do Dente.....	140
4.3. Nomenclatura.....	146
4.4. Traçado Aproximado de Tredgold.....	148
4.5. Relações Geométricas.....	152
4.6. Parâmetros de Desempenho.....	159
4.7. Hipoides.....	163
4.8. Revisão de Conhecimentos.....	165
4.9. Referências Bibliográficas.....	167
<b>5. ENGRENAGENS DE PARAFUSO SEM-FIM</b>	
5.1. Introdução.....	169
5.2. Geração do Dente.....	175
5.3. Perfis dos Filetes.....	178
5.4. Nomenclatura.....	181
5.5. Relação de Transmissão.....	183
5.6. Relações Geométricas.....	188
5.7. Parâmetros de Desempenho.....	195
5.8. Revisão de Conhecimentos.....	203
5.9. Referências Bibliográficas.....	206
<b>6. DINÂMICA DE ENGRENAGENS</b>	
6.1. Introdução.....	207
6.2. Diagramas do Corpo Livre.....	213
6.3. Nomenclatura.....	218
6.4. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos.....	220
6.5. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Inclinados.....	227
6.6. Engrenagens Cônicas.....	236
6.7. Engrenagens de Parafuso Sem-fim.....	244
6.8. Revisão de Conhecimentos.....	253
6.9. Referências Bibliográficas.....	256

# CAPÍTULO 1.

## ASPETOS GERAIS SOBRE ENGRENAGENS

### 1.1. INTRODUÇÃO

Nos mecanismos<sup>1</sup>, a transmissão ou transformação de movimento pode ser realizada de duas formas distintas, nomeadamente por contacto direto ou por ligação intermédia (Flores e Claro, 2007). No primeiro caso, o movimento é promovido pelo contacto entre as superfícies dos órgãos motor e movido. Neste grupo incluem-se, por exemplo, os sistemas de transmissão por rodas de atrito, as engrenagens e os mecanismos do tipo came-seguidor, tal como ilustra a figura 1.1.

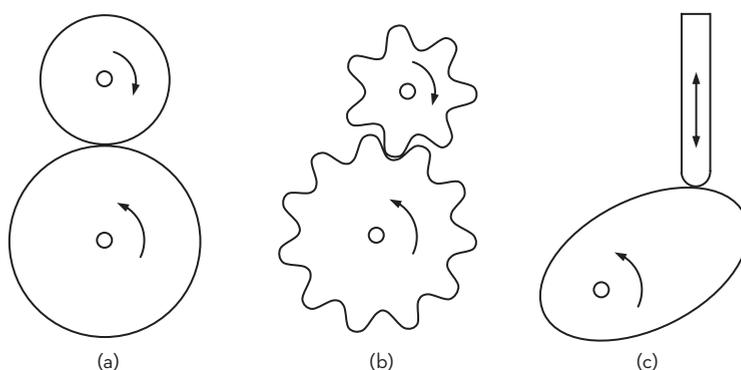


Figura 1.1 - Sistemas de transmissão de movimento por contacto direto: (a) Rodas de atrito; (b) Engrenagem; (c) Mecanismo came-seguidor.

<sup>1</sup> Um mecanismo é um conjunto de corpos, em que um deles é fixo, ligados entre si por pares cinemáticos com propósito de transmitir ou transformar um determinado movimento (Flores, 2012).

## 1.2. BREVE RESENHA HISTÓRICA

É longa a história associada à gênese e evolução das engrenagens (Crosher, 2014). Já por volta do ano 1700 a.C. surgem, em poemas da literatura Hindu, referências a carros e a rodas. Há menções a engrenagens nos trabalhos de Aristóteles (384-322) e de Arquimedes (287-212). Um dos primeiros dispositivos que incluía um conjunto de engrenagens existia já no ano 2634 a.C. na China, cuja denominação era o “carro que segue o sul”. Tratava-se, na realidade, de um engenhoso sistema de engrenagens montado sobre um carro (ou carroça) que, mercê do funcionamento de um trem epicicloidal<sup>6</sup>, mantinha o braço de uma figura humana sempre apontado para o sul, independentemente da direção em que o carro se deslocava (Flores e Claro, 2007). A figura 1.9 ilustra um modelo do carro que segue o sul. Este dispositivo era, na época, utilizado como uma espécie de bússola para orientar os viajantes que atravessavam o deserto de Gobi<sup>7</sup>. Há autores que defendem que o carro que segue o sul existiu de facto, mas, muito provavelmente, não foi utilizado como sistema de ajuda à navegação. Strandh (1979) demonstrou que um desvio de 1% no diâmetro das rodas, resultaria em erros da ordem dos 180° após percorridos poucos quilómetros.

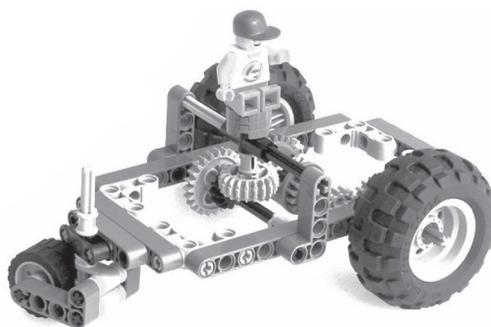


Figura 1.9 - Modelo do carro que segue o sul inventado na China no ano 2634 a.C.

A figura 1.10a apresenta uma engrenagem primitiva usada pelos chineses no século III a.C. Este tipo de engrenagem é ainda utilizado nos nossos dias em sistemas de elevação de água, sendo vulgarmente denominadas de noras (Branco *et al.*, 2009). Este tipo de roda é também utilizado em moinhos. As rodas dentadas primitivas eram muito rudimentares, sendo constituídas por pedaços de madeira<sup>8</sup> que se inseriam num disco ou numa roda. Mais tarde, em pleno Quatrocentos, o italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) apresenta inúmeras ilustrações onde se podem identificar arranjos de engrenagens, tal como o que se ilustra na figura 1.10b (Drago, 1988).

6 Trem epicicloidal, também designado por redutor planetário, é um caso especial de engrenagens que permite obter relações de transmissão bastante elevadas em soluções bastante compactas.

7 O deserto de Gobi é um extenso deserto situado entre a região norte da China e a região sul da Mongólia. A título de curiosidade, refira-se que o vocábulo *gobi* significa deserto em Mongol.

8 Na realidade, as primeiras rodas dentadas eram feitas de madeira ou em materiais similares facilmente trabalháveis. Atualmente, os principais materiais são o aço de baixo carbono, o aço inoxidável, o ferro fundido nodular, o bronze e os materiais poliméricos.

## 1.4. NOMENCLATURA FUNDAMENTAL

O principal objetivo desta secção é o de introduzir a nomenclatura fundamental associada à configuração geométrica dos dentes das engrenagens. Para o efeito, tome-se em consideração o setor de uma roda cilíndrica exterior de dentado reto representado na figura 1.21, na qual se inclui alguma terminologia básica relativa ao referido dentado (Shigley e Mischke, 1989).

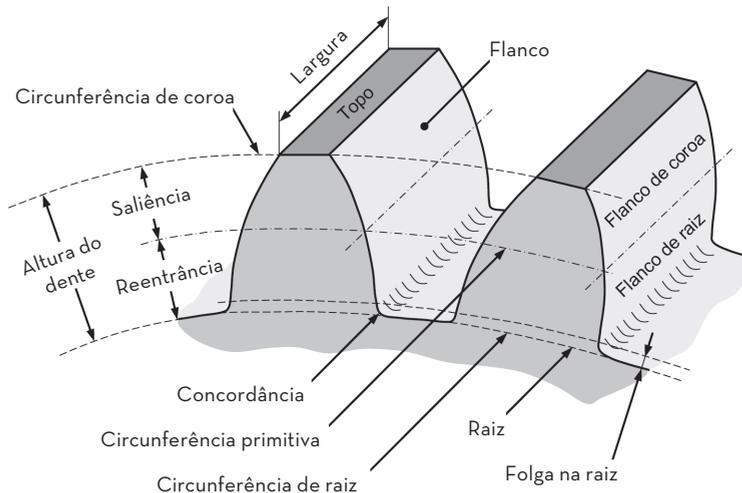


Figura 1.21 - Setor de uma roda cilíndrica exterior de dentes retos.

Considere-se agora que uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos é intersecada por um plano perpendicular ao eixo das rodas. Deste modo, obtém-se o perfil transversal<sup>17</sup> do dentado, tal como se representa parcialmente na figura 1.22. Assim, neste perfil do dentado podem distinguir-se os seguintes elementos<sup>18</sup>:

- Coroa ou cabeça, que é o arco de circunferência que delimita superiormente o dente (segmento  $AE$ ),
- Raiz ou pé, que é o arco de circunferência que delimita inferiormente o dente (segmento  $DF$ ),
- Linha de flanco, que é a parte do perfil do dente compreendida entre a coroa e a raiz (segmentos  $AD$  e  $EF$ ).

Às superfícies cilíndricas coaxiais com o eixo da roda que contêm as coroas e as raízes dos dentes dá-se o nome de superfície de coroa e superfície de raiz, respetivamente. Por conseguinte, os diâmetros destas superfícies denominam-se de diâmetro de coroa ( $d_w$ ) e diâmetro de raiz ( $d_f$ ), os quais estão representados na figura 1.22. O cilindro

<sup>17</sup> Quando o plano de interseção passa pelo eixo da roda obtém-se o perfil axial do dentado.

<sup>18</sup> Dever referir-se que a nomenclatura adotada no presente texto segue a norma ISO 701 de 1988, revista em 2013 e denominada *International gear notation - Symbols for geometrical data*.

## 1.5. GERAÇÃO DE PERFIS DE DENTES

Tal como foi apresentado na secção anterior, o perfil transversal de um dente de uma roda dentada cilíndrica é o resultado da interseção da superfície do dente com um plano perpendicular ao eixo da roda. É por demais evidente que o perfil dos dentes desempenha um papel de importância crucial no bom funcionamento das engrenagens. Com efeito, uma engrenagem só funcionará corretamente<sup>21</sup> se, durante o período de contacto entre as superfícies dos dentes, de uma e outra roda, aquelas forem permanentemente tangentes. Quando assim não sucede, o desgaste dos dentes ocorrerá muito rapidamente, prejudicando sobremaneira o desempenho das engrenagens (Mabie e Reinholtz, 1987). Assim, para que as superfícies dos dentes em contacto sejam sempre tangentes entre si durante o engrenamento é necessário que toda a infinidade de pares de perfis correspondentes numa e noutra roda, obtidos pela interseção das superfícies dos dentes em ambas as rodas com os diferentes planos perpendiculares aos seus eixos, sejam continuamente tangentes. Quando existe tangência entre as superfícies de dois dentes de duas rodas engrenadas, então estes perfis dos dentes denominam-se perfis conjugados. A figura 1.26 ilustra dois setores de duas rodas dentadas com perfis conjugados. Os perfis dos dentes devem ser projetados de modo a garantir uma relação de transmissão constante durante todo o engrenamento. Na verdade, esta ideia traduz o princípio fundamental do engrenamento, tal como se analisará mais detalhadamente nas secções seguintes deste documento (Henriot, 1979; Shigley e Mischke, 1989).

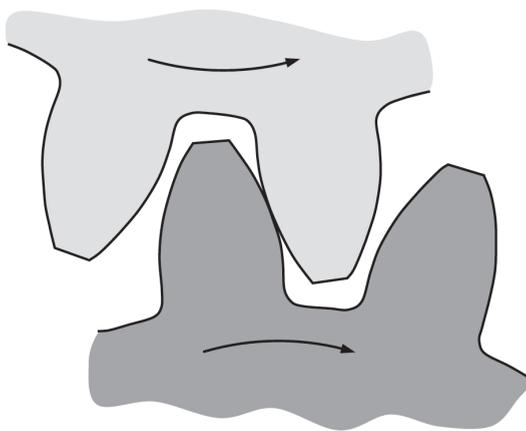


Figura 1.26 - Setores de duas rodas dentadas com perfis conjugados.

O modo mais frequente de gerar os perfis dos dentes é o que se baseia na utilização de curvas cíclicas ou de curvas evolventes (Wilson e Sadler, 1993). As curvas cíclicas

<sup>21</sup> O funcionamento correto de uma engrenagem diz respeito, fundamentalmente, à garantia na transmissão do movimento com relação de transmissão constante.

pelos pontos  $PI_1, I_1I_2, \dots, I_7I_8$ . As sucessivas posições do centro da rolante obtêm-se pela interseção do arco que passa pelo centro da rolante, desenhado a cinzento na figura 1.28b, com as correspondentes direções radiais. Estes centros estão representados na figura 1.28c por  $C_1, C_2, \dots, C_8$ . Podem agora ser desenhadas as novas rolantes em cada centro obtido pelo procedimento anterior, tal como se mostra na figura 1.28c. Finalmente, as sucessivas posições do ponto de traçagem são obtidas pela interseção de cada rolante com os correspondentes arcos de circunferência inicialmente desenhados, como mostra a figura 1.28d. Unindo os pontos  $P, P_1, P_2, \dots, P_8$ , obtêm-se a curva epicloide.

Deve referir-se que é possível obter as equações paramétricas de uma curva epicloide. Da análise da geometria da figura 1.28, observa-se que, por um lado, a curva epicloide é simétrica em relação a um eixo  $e$ , por outro, a normal em qualquer dos seus pontos passa sempre pelo ponto de contacto da rolante com a base (Henriot, 1979; Wilson e Sadler, 1993).

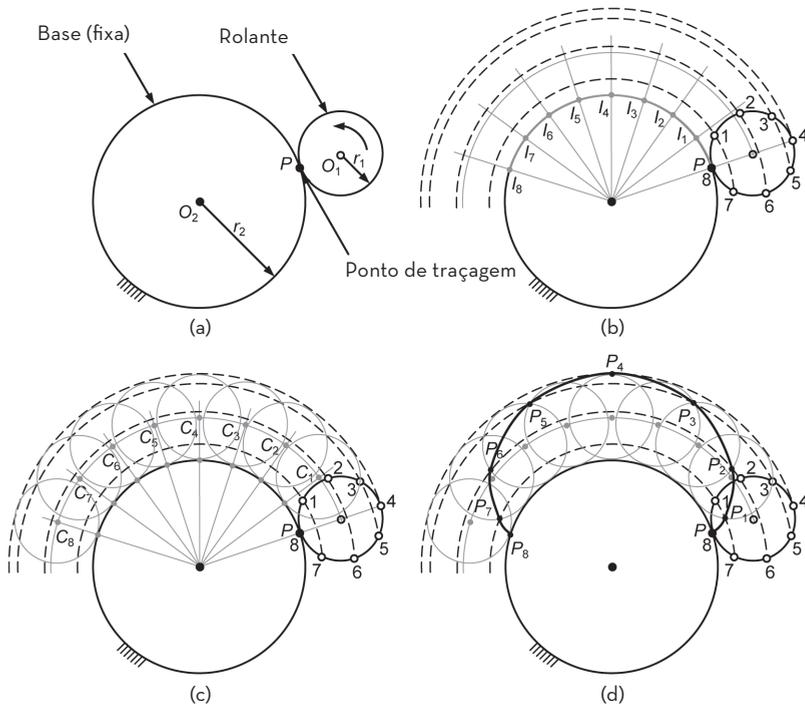


Figura 1.28 - Traçado de uma curva cíclica epicloide.

De seguida é apresentado o procedimento para se obter um dentado cicloidal para uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos. Assim, para o efeito devem considerar-se as circunferências primitivas das duas rodas como as bases do movimento. Então as circunferências rolantes rolam sem escorregar, ora uma, ora outra, sobre cada circunferência de base, consoante se pretende gerar o perfil

- Uma roda dentada com perfis dos dentes em evolvente de círculo pode funcionar com qualquer outra roda, desde de que ambas apresentem o mesmo módulo,
- É possível o engrenamento, em condições ainda aceitáveis, entre rodas com dentes com perfil em evolvente, mesmo quando existe variação do entre-eixo (aumento ou diminuição), desgaste dos apoios ou deformação dos elementos de transmissão. Esta circunstância altera, todavia, o valor do ângulo de pressão, tal como se ilustra na figura 1.37,
- A linha de ação ou de linha de engrenamento é um segmento de reta que forma com a tangente às circunferências primitivas um ângulo de pressão que é constante durante a transmissão do movimento. Todos os pontos de contacto estão localizados sobre a linha de ação.

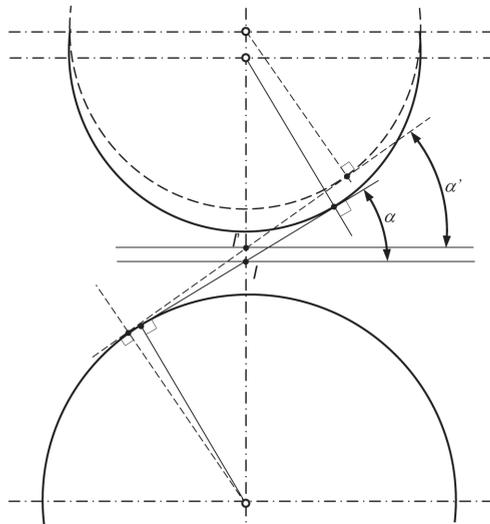


Figura 1.37 - Efeito da variação do entre-eixo no ângulo de pressão.

Numa engrenagem de dentado reto com dentes com perfil em evolvente de círculo, a linha de ação é constituída por um troço da reta geradora, a qual está compreendida entre as circunferências de coroa das duas rodas engrenadas. Assim, a força transmitida entre os dentes apresenta sempre a direção da linha de ação. Esta força está representada pela letra  $N$  na figura 1.38, a qual se pode relacionar com a força tangencial, responsável pela transmissão de potência, do seguinte modo

$$F_t = N \cos \alpha \quad (1.12)$$

medida que as rodas 1 e 2 giram em torno de  $O_{01}$  e  $O_{02}$ , respectivamente. No caso das engrenagens, as curvas  $C_1$  e  $C_2$  designam-se de curvas primitivas, e em particular no caso de engrenagem circulares, aquelas curvas chamam-se circunferências primitivas<sup>26</sup>.

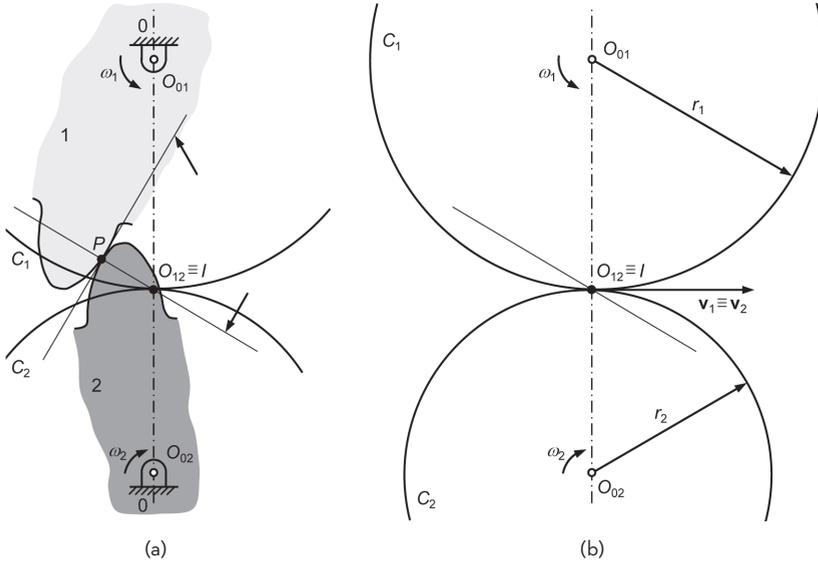


Figura 1.41 - Identificação das curvas primitivas numa engrenagem.

Atendendo a que as rodas 1 e 2, representadas parcialmente na figura 1.41, rodam com velocidades angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente, então pode definir-se relação de transmissão como sendo o quociente entre estas duas quantidades, ou seja,

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1.17)$$

em que nesta definição se admite que a roda 1 é a motora, sendo, por conseguinte a roda 2 movida ou mandada. A velocidade linear do ponto primitivo pode ser calculada pela da roda 1 ou pela roda 2, resultando a mesma quantidade, uma vez que este ponto é um centro instantâneo de rotação. Assim, pode escrever-se que

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 \overline{O_{01}I} = \omega_2 \overline{O_{02}I} \quad (1.18)$$

A equação (1.18) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_{02}I}}{\overline{O_{01}I}} \quad (1.19)$$

<sup>26</sup> Quando as engrenagens estão no espaço tridimensional, então o centro instantâneo de rotação dá lugar ao eixo instantâneo de rotação, e as curvas primitivas dão lugar às superfícies primitivas (e.g. cones, cilindros, etc.).

# CAPÍTULO 2.

## ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS

### 2.1. INTRODUÇÃO

No presente texto são apresentados conceitos e fundamentos relativos à caracterização e ao desempenho de engrenagens cilíndricas de dentes retos, os quais servem também de base no estudo de engrenagens de dentes inclinados, engrenagens cónicas e engrenagens do tipo parafuso sem-fim. Na realidade, esta é a abordagem mais frequentemente adotada nos principais livros de texto sobre a temática das engrenagens (Juvinal e Marshek, 2006; Branco *et al.*, 2009; Budynas e Nisbett, 2011).

A figura 2.1 mostra duas engrenagens<sup>30</sup> cilíndricas de dentes retos, a qual serve fundamentalmente para evidenciar a forma dos dentes, bem como o modo de engrenamento entre cada par de rodas. As engrenagens cilíndricas de dentes retos podem ser exteriores ou interiores, como ilustra também a figura 2.1 (Wilson e Sadler, 1993). É indubitável que as engrenagens cilíndricas de dentado reto são as mais frequentemente utilizadas em máquinas e mecanismos quando se pretende transmitir movimento entre eixos paralelos. Algumas das razões que concorrem para a sua popularidade prendem-se com a simplicidade e facilidade associadas às atividades de projeto, fabrico, montagem e manutenção (Flores e Gomes, 2014). Este tipo de engrenagem apresenta rendimentos elevados (até 99%), possibilita a obtenção de relações de transmissão elevadas (8:1) e transmite potências elevadas (Niemann, 1971).

<sup>30</sup> Deve lembrar-se que uma engrenagem é um sistema de transmissão de movimento constituído por duas rodas dentadas (Henriot, 1979).

Considerando agora uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normal, representada na figura 2.6 pelas circunferências primitivas, então a distância entre os eixos das rodas pode ser calculada como

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (2.21)$$

em que os índices 1 e 2 se referem, respectivamente, ao pinhão (ou carreto) e à roda (ou coroa). Utilizando agora a expressão (2.1), a equação (2.21) pode ser reescrita do seguinte modo<sup>33</sup>

$$a = \frac{mz_1 + mz_2}{2} = m \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (2.22)$$

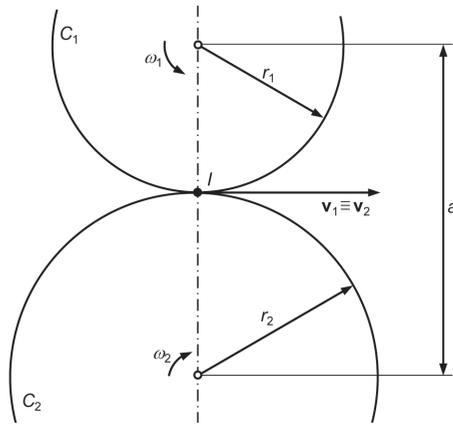


Figura 2.6 - Engrenagem cilíndrica exterior representada pelas circunferências primitivas.

Ainda na figura 2.6 está representada a velocidade do ponto primitivo, o qual pertence quer ao pinhão, quer à roda. Atendendo a que este ponto é um centro instantâneo de rotação, então pode escrever-se a seguinte igualdade

$$v_1 = v_2 \Leftrightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad (2.23)$$

em que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as velocidades angulares do pinhão e da roda, respectivamente. Assim, atendendo à definição de relação de transmissão, pode escrever-se que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad (2.24)$$

<sup>33</sup> Deve relembrar-se que o engrenamento entre duas rodas dentadas só é possível se estas tiverem o mesmo módulo (Flores e Gomes, 2014).

## 2.4. RELAÇÃO DE CONDUÇÃO

Nesta secção é desenvolvida uma expressão geral que permite determinar o valor da relação de condução para o caso de engrenagens cilíndricas de dentado reto normal. Para o efeito, considere-se a figura 2.12 onde se representa um engrenamento deste tipo de engrenagem (Branco *et al.*, 2009; Norton, 2013).

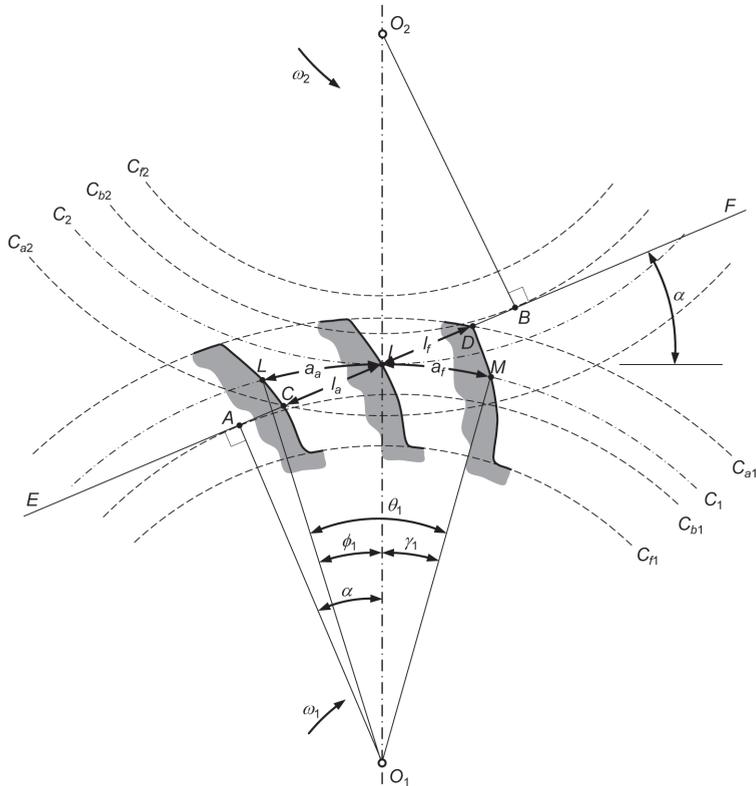


Figura 2.12 – Representação dos arcos e dos comprimentos de aproximação e de afastamento numa engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto.

Tal como foi apresentado na secção anterior, a definição de relação de condução pode ser escrita do seguinte modo (Budynas e Nisbett, 2011)

$$\varepsilon = \frac{a}{p} \quad (2.38)$$

em que  $a$  representa o arco de condução e  $p$  é o passo da engrenagem. O arco de condução é igual à soma do arco de aproximação com o arco de afastamento, ou seja,

$$a = a_a + a_f = LI + IM \quad (2.39)$$

Por seu lado, os arcos elementares descritos pelas circunferências primitivas podem ser determinados considerando que aquelas descrevem um movimento uniforme

$$ds = v_1 dt = \omega_1 \frac{d_1}{2} dt \quad (2.73)$$

$$ds = v_2 dt = \omega_2 \frac{d_2}{2} dt \quad (2.74)$$

Combinando agora as equações (2.72), (2.73) e (2.74) obtêm-se as expressões

$$\omega_1 dt = \frac{2}{d_1 \cos \alpha} dx \quad (2.75)$$

$$\omega_2 dt = \frac{2}{d_2 \cos \alpha} dx \quad (2.76)$$

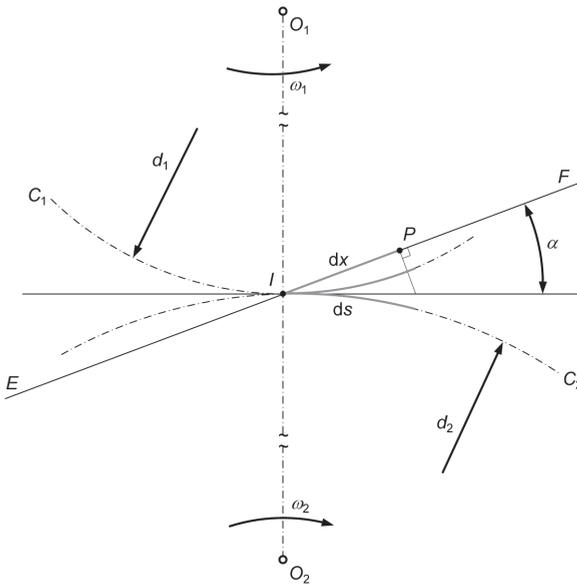


Figura 2.19 - Ponto genérico  $P$  situado sobre a linha de engrenamento para o caso de uma engrenagem cilíndrica exterior que descreve um deslocamento elementar  $dx$ .

Por outro lado, considerando as equações (2.66) e (2.67), o escorregamento elementar correspondente ao intervalo de tempo  $dt$  é dado por

$$dg = (\omega_1 + \omega_2) \cdot x dt \quad (2.77)$$

modo, o trabalho<sup>42</sup> motor disponível, que pode ser fornecido à coroa, durante uma volta completa do pinhão é dado por

$$W_d = F_t \Delta s = N \cos \alpha \pi d_1 \quad (2.98)$$

em que  $\Delta s$  representa o deslocamento efetuado pelo pinhão durante uma volta completa, ou seja, o perímetro  $\pi d_1$ . Na equação (2.98)  $N$  representa a magnitude da força normal de contacto que atua nos dentes e  $\alpha$  é o ângulo de pressão da engrenagem, tal como é ilustrado na figura 2.23.

É sabido que na realidade, a presença do atrito entre os perfis conjugados dá origem a uma força de atrito que atua perpendicularmente à linha de engrenamento. Por conseguinte, a força resultante que atua nas superfícies dos dentes não tem a mesma direção da linha de engrenamento. A figura 2.24 mostra exatamente esta situação, em que  $R$  representa a força resultante no contacto. Admite-se também que o pinhão (1) é a roda motora.

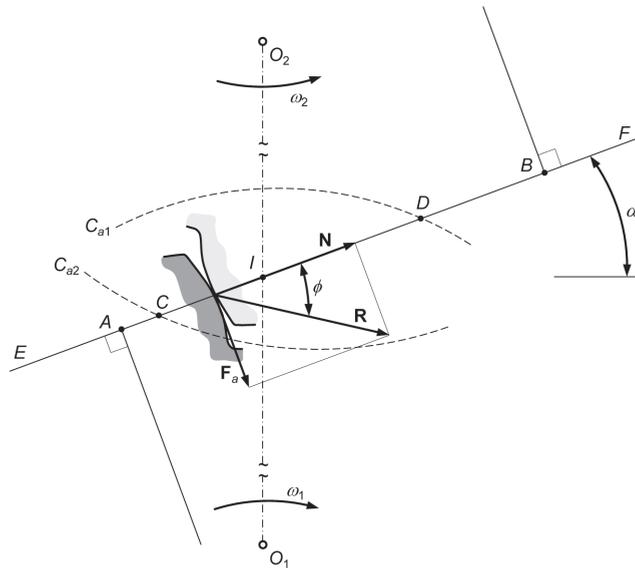


Figura 2.24 - Representação das forças que atuam nos perfis conjugados quando se considera a existência de atrito entre as superfícies dos dentes.

Atendendo à definição da lei de atrito seco de Coulomb, pode escrever-se a seguinte expressão para a força de atrito (Greenwood, 1965)

$$F_a = \mu N \quad (2.99)$$

42 O trabalho é, por definição, uma medida da energia transmitida por uma dada força ( $F$ ), quando esta efetua um determinado deslocamento ( $\Delta s$ ). O trabalho é expresso do seguinte modo  $W = F \Delta s$ .

# CAPÍTULO 3.

## ENGENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES INCLINADOS

### 3.1. INTRODUÇÃO

Nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados ou helicoidais, tal como a própria designação sugere, os dentes apresentam uma inclinação relativamente ao eixo das rodas. Na verdade, neste tipo de engrenagens os dentes estão dispostos transversalmente em forma de hélice em relação ao eixo das rodas. A figura 3.1 evidencia as diferenças entre uma engrenagem cilíndrica de dentes retos e uma engrenagem cilíndrica de dentes inclinados. É oportuno observar-se que as engrenagens de dentes retos são um caso particular das engrenagens de dentes helicoidais, isto é, representam o caso em que o ângulo de inclinação dos dentes é nulo.

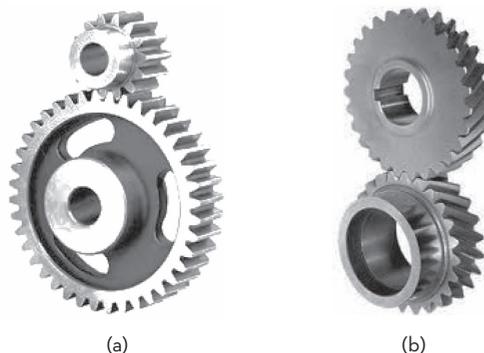


Figura 3.1 - (a) Engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos; (b) Engrenagem cilíndrica exterior de dentes inclinados.

cilíndrica de dentes inclinados, o ângulo de inclinação dos dentes das duas rodas tem de ser o mesmo, porém, uma roda apresenta hélice direita e a outra hélice esquerda, tal como se pode observar na figura 3.3a.

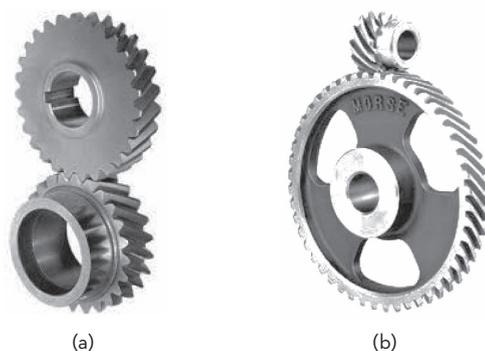


Figura 3.3 - (a) Engrenagem cilíndrica exterior de dentes inclinados em que os eixos são paralelos;  
(b) Engrenagem cilíndrica exterior de dentes inclinados de eixos cruzados.

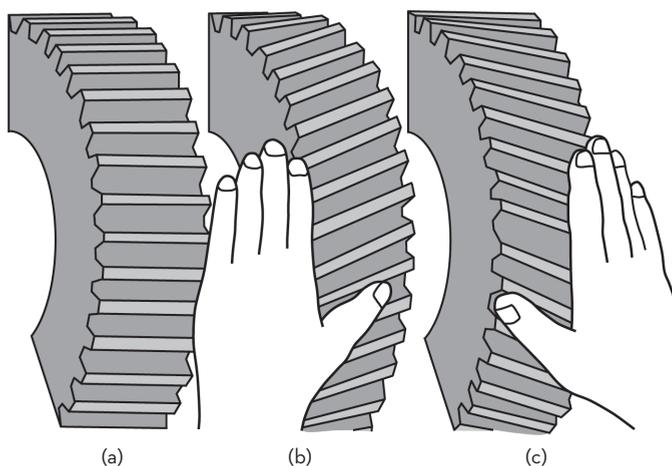


Figura 3.4 - (a) Roda cilíndrica exterior de dentes retos; (b) Roda cilíndrica exterior helicoidal com hélice esquerda; (c) Roda cilíndrica exterior helicoidal com hélice direita.

É sabido que numa engrenagem cilíndrica de dentes retos, o engrenamento entre um par de dentes é materializado por um segmento de reta paralelo aos eixos das rodas, o qual se estende simultaneamente a toda a largura do dente (cf. figura 3.5a). Por seu lado, nas engrenagens de dentes inclinados, o engrenamento entre os dentes das rodas ocorre de forma progressiva, isto é, inicia-se com um contacto pontual, o qual se vai desenvolvendo ao longo de uma linha à medida que o engrenamento vai progredindo (cf. figura 3.5b). A linha de contacto é, nestes casos, oblíqua em relação aos eixos das rodas (Niemann, 1971). Na verdade, é esta característica associada ao engrenamento progressivo que faz com que as forças de contacto entre os dentes

### 3.4. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesta secção são estudadas as principais relações geométricas e proporções dos dentes em engrenagens cilíndricas de dentado inclinado<sup>56</sup>. É sabido que para este tipo de engrenagem o ângulo de hélice varia desde a raiz até à coroa do dente, tal como se pode observar na figura 3.11. Com o intuito de estabelecer uma relação matemática entre os ângulos de inclinação primitiva e de inclinação de base considere-se a planificação do cilindro primitivo e do cilindro de base na extensão do correspondente avanço, tal como se ilustra na figura 3.13.

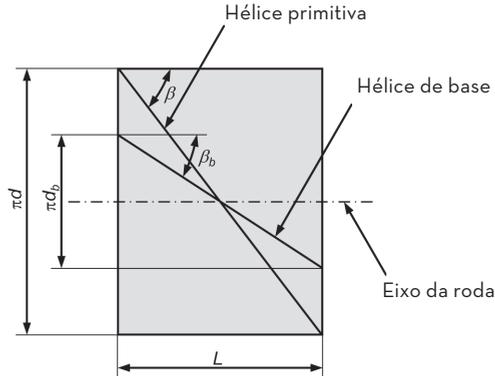


Figura 3.13 - Planificação de cilindro primitivo e do cilindro de base.

Da análise da figura 3.13 pode escrever-se que

$$L = \frac{\pi d_b}{\operatorname{tg} \beta_b} = \frac{\pi d}{\operatorname{tg} \beta} \quad (3.4)$$

em que  $L$  é o passo de hélice ou avanço, isto é, representa a progressão da roda ao fim de uma rotação completa. Observa-se, portanto, que o avanço é o mesmo, quer se considere a hélice primitiva ou a hélice de base. Assim, da equação (3.4) resulta que

$$\operatorname{tg} \beta_b = \frac{d_b}{d} \operatorname{tg} \beta \quad (3.5)$$

Considerando agora a figura 3.11, no plano de rotação da roda verifica-se que

$$d_b = d \cos \alpha, \quad (3.6)$$

<sup>56</sup> Os parâmetros geométricos relativos às engrenagens cilíndricas de dentes inclinados seguem as mesmas recomendações existentes para as rodas de dentado reto. Assim a saliência e a reentrância apresentam o mesmo valor independentemente deste ser medido no plano de rotação ou no plano normal ao dente. Por seu lado, os valores do ângulo de pressão e do passo são, em geral, definidos no plano normal, podendo também ser estabelecidos no plano de rotação. Nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados, o ângulo de pressão real é normalizado e assume o valor de 20°.

*É fundamental estudar muito para ficar a saber um pouco.*

Montesquieu

# CAPÍTULO 4.

## ENGRENAGENS CÓNICAS

### 4.1. INTRODUÇÃO

Em geral, as engrenagens cónicas são utilizadas nas situações em que os eixos das rodas motora e movida são concorrentes<sup>59</sup> (Wilson e Sadler, 1993). As engrenagens cónicas podem ter dentes retos, helicoidais e espirais ou curvos, podendo ainda apresentar eixos descentrados<sup>60</sup> (hipoides). A figura 4.1 ilustra os principais tipos de engrenagens cónicas (Flores e Gomes, 2014a).

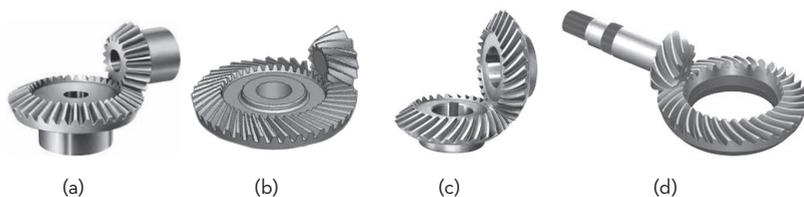


Figura 4.1 - (a) Engrenagem cónica de dentes retos; (b) Engrenagem cónica de dentes helicoidais; (c) Engrenagem cónica de dentes espirais; (d) Hipoide.

<sup>59</sup> As engrenagens cónicas são frequentemente denominadas de engrenagens concorrentes, pelo facto de os eixos das rodas se intersectarem.

<sup>60</sup> Refira-se que nas engrenagens cónicas descentradas ou hipoides o desalinhamento deve ser o menor possível de modo a minimizar as perdas por atrito e aquecimento (Niemann, 1971).

Neste tipo de engrenamento, roda coroa roda cônica, as faces dos dentes são planas que cruzam com o centro da esfera teórica, como se mostra na figura 4.7b. A figura 4.8 diz respeito ao engrenamento de rodas cônicas em que uma das rodas é do tipo coroa (Flores e Gomes, 2014a).

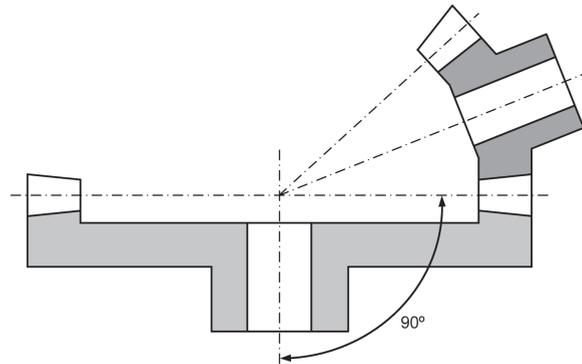


Figura 4.8 - Engrenamento de duas rodas cônicas, sendo uma das rodas do tipo coroa.

Tal como se referiu anteriormente, as engrenagens cônicas ou concorrentes podem apresentar dentes com formas diversas, tais como dentes retos, dentes helicoidais e dentes espirais (Henriot, 1979; Budynas e Nisbett, 2011). A figura 4.9a diz respeito à representação simplificada<sup>68</sup> de uma engrenagem cônica de dentado reto. Neste caso particular, pode observar-se que os dentes das rodas motora e movida concorrem no vértice *S* dos cones primitivos. Refira-se de novo que devido às inerentes dificuldades de talhe, as rodas cônicas de dentado reto apresentam dentes piramidais, sendo, por isso, planas as faces dos dentes<sup>69</sup> (Drago, 1988). Na figura 4.9b ilustram-se as diferenças entre o dentado em evolvente esférica e dentado piramidal para o caso das engrenagens cônicas de dentes retos (Niemann, 1971).

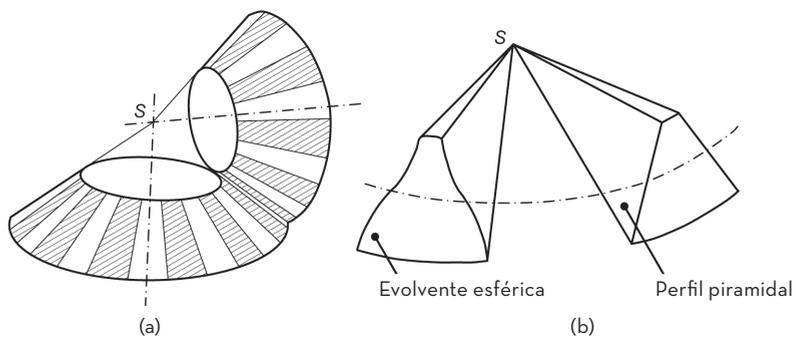


Figura 4.9 - (a) Representação simplificada de uma engrenagem cônica de dentes retos; (b) Dentado em evolvente esférica e dentado piramidal.

<sup>68</sup> Por simplicidade, no presente texto apenas se representam os cones primitivos das rodas motora e movida, sendo que os dentes estão materializados pela interseção dos próprios dentes com os cones primitivos (Henriot, 1979; Niemann, 1971).

<sup>69</sup> Na prática, na linha de engrenamento não existem grandes diferenças entre os dentados em evolvente esférica e piramidal, pelo que é de todo conveniente adotar este último caso para o dentado reto em engrenagens cônicas.

#### 4.4. TRAÇADO APROXIMADO DE TREDGOLD

Tal como foi mencionado anteriormente, nas engrenagens cónicas a geometria de contacto é desenvolvida numa superfície esférica. Este facto torna a geração dos perfis dos dentes impraticável uma vez que é impossível planificar uma superfície esférica. O denominado traçado aproximado de Tredgold<sup>70</sup> é um método simplificado que permite ultrapassar a referida limitação. Na verdade, com este método os perfis dos dentes são traçados não em superfícies esféricas, mas sim em superfícies cónicas. Estas últimas apresentam a vantagem de possibilitar a sua planificação (Henriot, 1979; Juvinal e Marshek, 2006). A figura 4.14 ilustra os cones *A* e *B* tangentes à superfície esférica dos segmentos primitivos das rodas. Os cones são depois desenrolados na superfície plana sendo os dentes das rodas gerados precisamente do mesmo modo que no caso das engrenagens cilíndricas (Flores e Gomes 2014a).

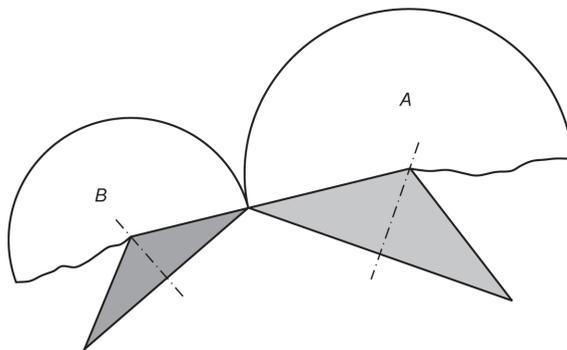


Figura 4.14 - Traçado aproximado de Tredgold.

O traçado de Tredgold é um método aproximado<sup>71</sup>, cujo erro é difícil de quantificar. Contudo, os perfis obtidos pelo traçado de Tredgold devem ser odontoides<sup>72</sup> conjugados e, deste modo garantir constância na relação de transmissão (Flores e Gomes, 2014a). De um modo simples pode dizer-se que o traçado de Tredgold se baseia no facto de um cone tangente a uma esfera, no ponto primitivo de uma engrenagem cónica, apresentar uma superfície muito próxima da de uma esfera, quando aquela está na vizinhança do ponto primitivo (Niemann, 1971). A figura 4.15a ilustra esta ideia fundamental. O cone referido é denominado de cone complementar e pode ser planificado. Assim, o perfil dos dentes de rodas cónicas, quando definido na parte de trás do cone ou cone complementar, é idêntico ao que se obtém para uma roda cilíndrica com um diâmetro primitivo equivalente, tal como se representa na figura 4.15b. Com efeito, uma vez determinado o número de dentes equivalente, a análise do desempenho de uma engrenagem cónica é em tudo semelhante à de uma

70 O método aproximado de Tredgold foi proposto pelo engenheiro britânico Thomas Tredgold em 1822, tendo sido adotado desde então até aos nossos dias (Crosher, 2014).

71 Na verdade, este método é suficientemente exato desde que a engrenagem cónica contenha rodas com 8 ou mais dentes. Em geral, as rodas cónicas devem ter pelo menos 13 dentes.

72 Odontoide diz respeito a algo que apresenta a forma de dente.

## 4.7. HIPOIDES

Tal como no caso das engrenagens cilíndricas, nas engrenagens cónicas o dentado reto é bastante utilizado uma vez que o seu projeto e fabrico são relativamente simples de concretizar. A montagem das engrenagens cónicas de dentes retos deve ser bastante cuidada de modo a garantir o bom funcionamento (Branco *et al.*, 2009). Contudo, quando as velocidades de funcionamento são elevadas, as engrenagens cónicas de dentes retos são assaz ruidosas.

Com o intuito de obter engrenamentos mais suaves utilizam-se rodas cónicas com dentes curvos, tal como se ilustra na figura 4.19. O ângulo de pressão neste tipo de dentado é, em geral, o mesmo que se considera para o dentado reto, ou seja,  $\alpha=20^\circ$ . Por seu lado, o ângulo de espiral é normalmente igual a  $35^\circ$ . Quando o ângulo de espiral é nulo, o dentado denomina-se de dentado *zerol* (Wilson e Sadler, 1993).

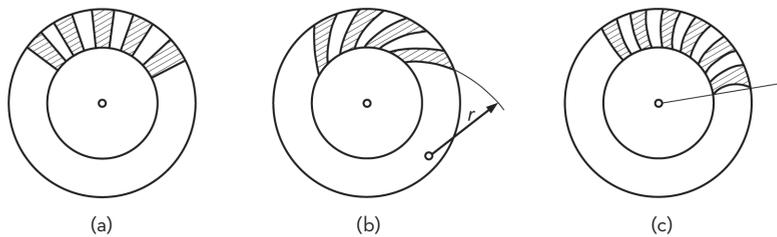


Figura 4.19 - Diferentes formas de dentes de rodas cónicas.

As rodas cónicas de dentes curvos possibilitam funcionamentos mais silenciosos, com velocidades e cargas elevadas. As transmissões com dentados curvos são mais suaves, uma vez que o próprio engrenamento é mais gradual, e proporcionam engrenamentos com maior número de dentes em contacto ao mesmo tempo, isto é, com maiores relações de condução (Wilson e Sadler, 1993).

Quando se torna necessário a utilização de rodas com eixos não concorrentes empregam-se engrenagens denominadas de hipoides<sup>74</sup>, tal como a que se representa na figura 4.20. As hipoides são engrenagens mais suaves que as engrenagens cónicas de dentes curvos e proporcionam maior capacidade de transmissão de carga. Na verdade, as hipoides proporcionam um maior número de dentes em contacto ao mesmo tempo, tornando o engrenamento mais silencioso. Pode dizer-se que a passagem de dentados espirais para engrenagens hipoides é equivalente à passagem de dentados retos para dentados helicoidais. Como inconvenientes, as hipoides têm um funcionamento que combina rolamento com escorregamento. Quanto maior for o descentramento dos eixos das rodas, maior será o escorregamento entre as superfícies dos dentes. Como consequência, as hipoides apresentam rendimentos mais baixos devido ao escorregamento existente e requerem a utilização de lubrificantes adequados às cargas e temperaturas em jogo. Uma vez que as hipoides são soluções

<sup>74</sup> Esta denominação decorre do facto das superfícies primitivas serem hiperboloides de revolução.

### 5.3. PERFIS DOS FILETES

Como é sabido, as engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal são um caso particular das engrenagens torsas em que uma das rodas, em geral a roda motora, tem a forma de um parafuso. Acresce ainda o facto de que os eixos do parafuso sem-fim e da roda helicoidal serem perpendiculares (Shigley e Mischke, 1989). Relembre-se que para o caso do parafuso é mais adequado falar-se em filetes do parafuso do que em dentes (Henriot, 1979).

A análise descritiva das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal pode ser simplificada sobremaneira quando se considera o sem-fim como sendo uma cremalheira<sup>83</sup>, tal como se esquematiza na figura 5.9 (Henriot, 1979). Deste modo, quando o parafuso sem-fim roda em torno do próprio eixo, qualquer secção<sup>84</sup> dos filetes do parafuso descreve um movimento de translação retilínea paralela ao eixo do parafuso sem-fim (Henriot, 1979).

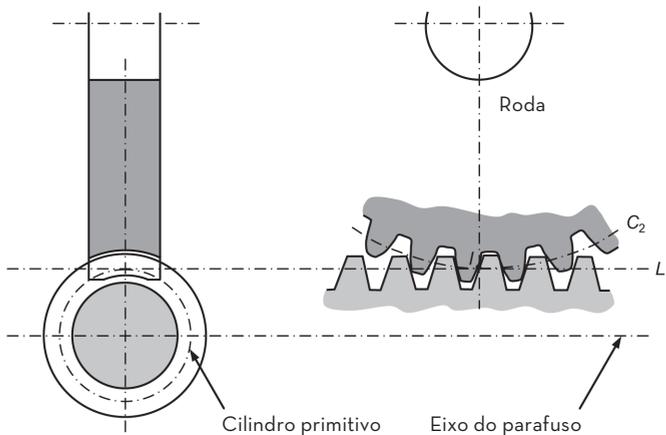


Figura 5.9 - Secção de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal.

Representando o passo helicoidal do parafuso sem-fim por  $p_z$ , então, por definição, uma dada secção desloca-se uma distância  $p_z$  por cada rotação do parafuso sem-fim. Esta amplitude de movimento de translação axial chama-se avanço, tal como se evidencia na figura 5.3. Assim, em analogia com a cremalheira, pode afirmar-se que a roda helicoidal descreve a mesma amplitude de rotação quando a cremalheira se desloca em movimento puro de translação ao longo do eixo do parafuso sem-fim, ou seja é como que o parafuso sem-fim não rodasse.

A figura 5.9 diz respeito à secção de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal que resulta quando aquela é intersetada pelo plano médio. Deste modo,

83 Cremalheira diz respeito a uma roda cujo raio é infinito. Este tipo particular de roda descreve movimento de translação retilínea (Flores e Gomes, 2014a).

84 Secções que resultam da intersecção do parafuso sem-fim com um plano paralelo ao eixo.

# CAPÍTULO 6.

## DINÂMICA DE ENGRENAGENS

### 6.1. INTRODUÇÃO

Como é sabido, as engrenagens são sistemas mecânicos utilizados para transmitir potência e movimento entre os órgãos motor e movido. Tal como acontece em outros sistemas mecânicos de transmissão de movimento, o projeto e dimensionamento dos componentes que constituem as engrenagens assenta no conhecimento das forças que se desenvolvem durante o seu funcionamento (Shigley e Mischke, 1989; Wilson e Sadler, 1993). No caso das engrenagens, a determinação das forças que atuam nos dentes depende das condições de funcionamento e do tipo de dentado. Na verdade, o correto conhecimento da magnitude e do sentido de atuação das diversas componentes da força de engrenamento é de primordial importância, pois permite a determinação dos esforços que atuam nos dentes, nos veios que suportam as rodas dentadas, e nos respetivos apoios dos veios. Com efeito, conhecidas as cargas que se desenvolvem nas engrenagens é possível efetuar o cálculo dos dentes, o dimensionamento dos veios e a seleção dos apoios (Branco *et al.*, 2009).

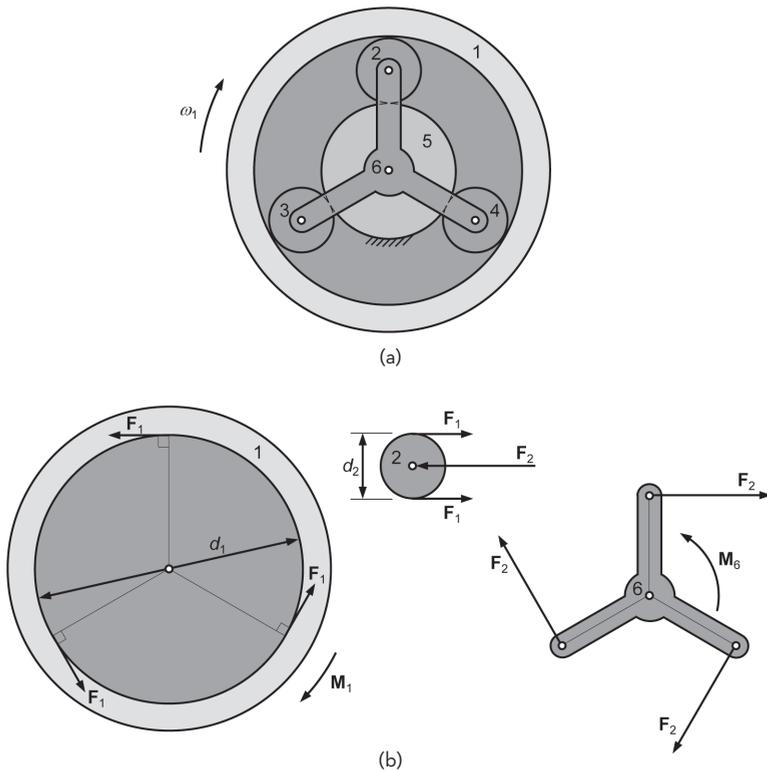
A análise dinâmica de engrenagens diz respeito ao estudo das forças que atuam nas engrenagens. Esta análise é frequentemente denominada de análise de forças e assenta, em geral, num conjunto de premissas simplificativas. Em primeiro lugar, na análise dinâmica de engrenagens é habitual efetuar-se a simplificação que considera que as forças de engrenamento são pontuais e atuam na zona central dos flancos dos dentes. Por outro lado, durante o engrenamento de duas rodas dentadas é provável que um dente seja mais solicitado do que os dentes adjacentes, por isso, é comum considerar-se que a força de engrenamento é totalmente transmitida num par dente. Na análise dinâmica de engrenagens é habitual considerar-se que

### EXERCÍCIO 6.3

**Enunciado:** A figura 6.6a ilustra um trem de engrenagens acionado pelo anel exterior, 1, que, por sua vez transmite o movimento às rodas 2, 3 e 4. A roda central, 5, está estacionária e ligada ao braço 6. Assim, atendendo a que o momento motor que atua na roda 1 é igual a  $M_1$ , determine a relação de transmissão do trem.

**Padrão de resposta esperado:**

Para se proceder à resolução deste exercício, deve começar-se pela elaboração dos diagramas do corpo livre dos vários componentes, tal como se representa na figura 6.6b.



Deve notar-se que os diagramas do corpo livre aqui representados são uma versão simplificada dos mesmos. Com efeito, da análise do diagrama do corpo livre do anel tem-se que o momento  $M_1$  é dividido<sup>91</sup> igualmente pelas rodas 2, 3 e 4, ou seja

$$M_1 = 3M_2 \quad (6.9)$$

<sup>91</sup> Esta situação é verdadeira, uma vez que se admite que o rendimento é unitário.

### 6.3. NOMENCLATURA

Antes de apresentar a análise dinâmica de engrenagens dos principais tipos de rodas dentadas é oportuno introduzir a nomenclatura fundamental relativa a este tipo de análise. Para o efeito, considere-se a figura 6.7 respeitante a uma engrenagem cilíndrica de dentado reto. Assim, o fixe ou estrutura do sistema mecânico é designado pelo número 0. À roda de entrada ou motora é atribuído o número 1, sendo que as restantes rodas são definidas sucessivamente pelos números 2, 3, 4 etc. até à última roda do sistema de transmissão de movimento. Pela mesma ordem de ideias, os veios das rodas são denominados pelas letras minúsculas do alfabeto, ou seja,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , etc. Por seu lado, às direções tangencial, radial e axial associadas aos engrenamentos são atribuídos os expoentes  $t$ ,  $r$  e  $a$ , respetivamente. De igual modo, as direções associadas aos eixos cartesianos são referidos pelas expoentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  (Shigley e Mischke, 1989; Branco *et al.*, 2009).

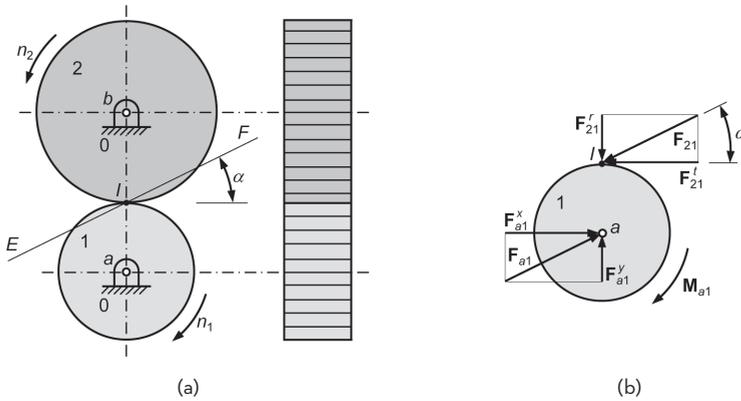


Figura 6.7 - (a) Engrenagem cilíndrica de dentes retos; (b) Diagrama do corpo livre do pinhão quando este é o órgão motor.

Com efeito,  $\mathbf{F}_{21}$  representa a força que a roda 2 exerce sobre a roda 1. Atendendo à terceira lei de Newton sabe-se que  $\mathbf{F}_{21}$  e  $\mathbf{F}_{12}$  têm a mesma direção, a mesma magnitude, mas atuam em sentidos opostos. A força que o veio  $a$  exerce na roda 1 é designada por  $\mathbf{F}_{a1}$ , a qual tem duas componentes cartesianas, tal como se pode identificar na representação da figura 6.7. O efeito do motor na roda 1 é indicado por  $\mathbf{M}_{a1}$ , que representa o momento motor. É frequente omitir os índices associados aos veios, assim tem-se que  $\mathbf{M}_{a1} = \mathbf{M}_1$ . Com efeito, doravante, utilizar-se-á esta nomenclatura no âmbito da análise dinâmica de engrenagens.

Uma vez elaborados os diagramas do corpo livre dos componentes das engrenagens, pode proceder-se à análise dinâmica, também denominada análise de forças. Assim, quando o sistema<sup>92</sup> em estudo está em repouso ou opera a uma

92 O vocábulo sistema denota qualquer componente, conjunto de componentes ou parte de uma máquina ou mecanismo que se pretende estudar. Com efeito, a análise de sistemas mecânicos complexos pode ser simplificada sobremaneira pela sucessiva elaboração do diagrama do corpo livre dos seus elementos.

pinhão e, por isso, tende a afastar o pinhão da roda. Por esta razão, a força radial é, frequentemente, denominada de força de separação.

No caso mais geral das transmissões por engrenagens é conhecida a potência e a velocidade de rotação do motor que aciona o pinhão, pelo que a força útil ou transmitida pode ser determinada do seguinte modo

$$F_{21}' = \frac{60P_1}{\pi d_1 n_1} \quad (6.21)$$

tal como havida sido demonstrado anteriormente e em que  $P_1$  é a potência do motor,  $d_1$  é o diâmetro primitivo do pinhão e  $n_1$  é a velocidade de rotação do pinhão, *i.e.*,

$$P_1 = M_1 \omega_1 \quad (6.22)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} \quad (6.23)$$

Procedendo de igual modo para a análise da roda, verificam-se as mesmas observações acima descritas para o pinhão. Por outro lado, da figura 6.8 podem ainda ser estabelecidas as seguintes relações fundamentais em dinâmica de engrenagens

$$F_{21}' = F_{21}' \operatorname{tg} \alpha \quad (6.24)$$

$$F_{21} = \frac{F_{21}'}{\cos \alpha} \quad (6.25)$$

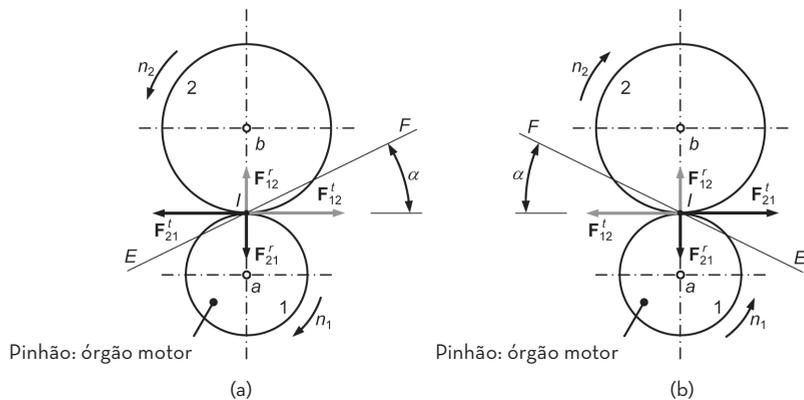


Figura 6.9 - Representação das forças que se desenvolvem no engrenamento em engrenagens cilíndricas de dentes retos: (a) O pinhão é o órgão motor e roda no sentido indireto; (b) O pinhão é o órgão motor e roda no sentido direto.

Observa-se, portanto, que a componente radial da força de engrenamento e força total podem ser expressas em função da força útil, ou seja, em função das características

$$F_{23}^r = F_{21}^r = F_{21}^t \operatorname{tg} \alpha = 1637,02 \times \operatorname{tg} 20 = 595,83 \text{ N.}$$

Com efeito, o momento que atua na roda 3 pode ser calculado do seguinte modo

$$M_3 = F_{23}^t \frac{d_3}{2} = 1637,02 \frac{600 \times 10^{-3}}{2} = 491,11 \text{ Nm.}$$

Finalmente, da análise das condições de equilíbrio da roda 3 obtêm-se os seguintes valores para as reações nos apoios desta roda

$$F_c^x = 595,83 \text{ N}$$

$$F_c^y = 1637,02 \text{ N.}$$

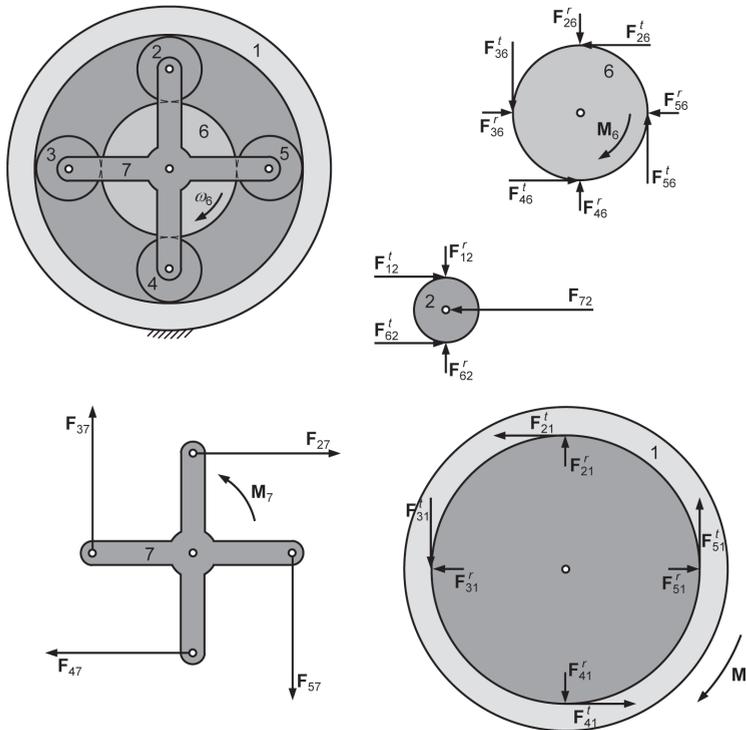


Figura 6.10 - Representação de um trem epicycloidal com roda fixa e respectivos diagramas do corpo livre.

O trem é acionado pelo planetário, roda 6.

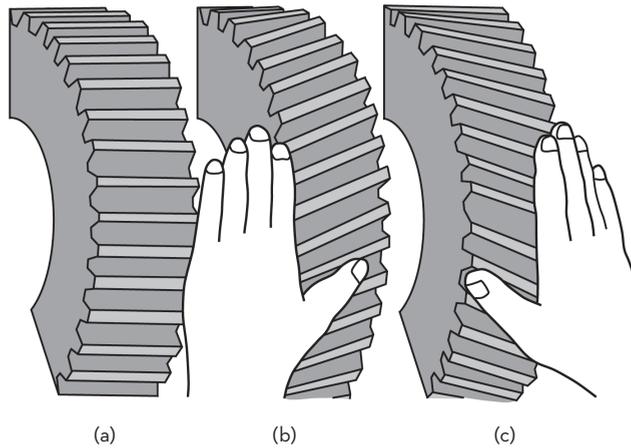


Figura 6.12 - (a) Roda cilíndrica exterior de dentes retos; (b) Roda cilíndrica exterior helicoidal com hélice esquerda; (c) Roda cilíndrica exterior helicoidal com hélice direita.

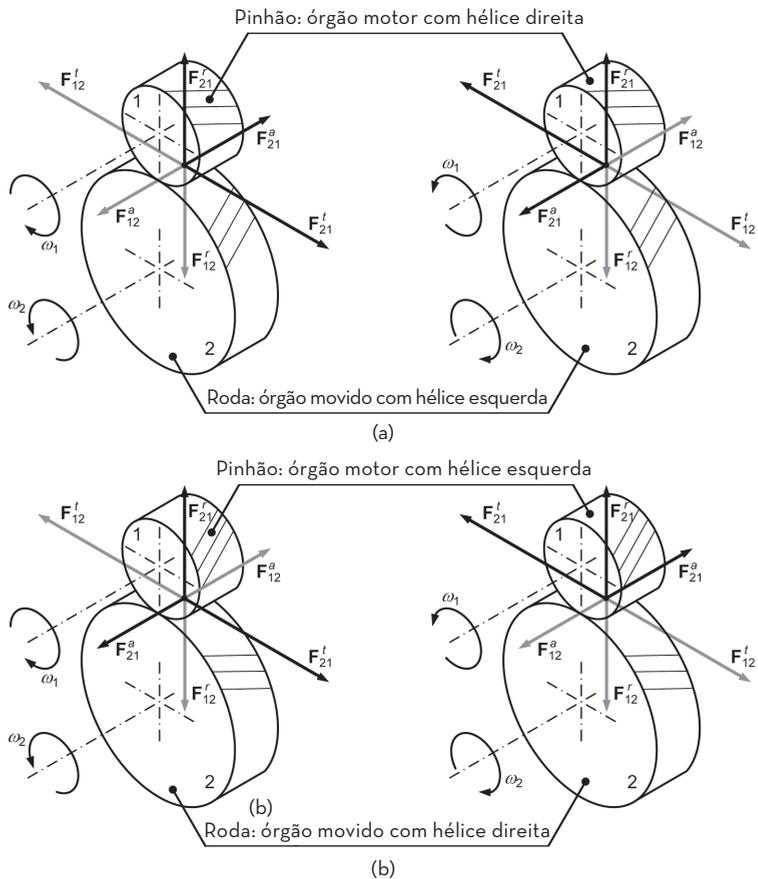


Figura 6.13 - Força que se desenvolvem no pinhão e na roda em engrenagens cilíndricas de dentes inclinados: (a) O pinhão é o órgão motor com hélice direita e a roda com hélice esquerda; (b) O pinhão é o órgão motor com hélice esquerda e a roda com hélice direita.

em que  $d_m$  representa o diâmetro médio da roda no cone primitivo definido do seguinte modo (Branco *et al.*, 2009)

$$d_m = d - b \operatorname{sen} \delta \quad (6.36)$$

onde  $d$  é o diâmetro primitivo da roda,  $b$  denota a largura do dentado e  $\delta$  representa o ângulo do cone primitivo. O diâmetro médio pode também ser obtido pela média entre os diâmetros primitivos interior e exterior (Wilson e Sadler, 1993).

As componentes radial e axial da força de engrenamento podem ser expressas em função da força transmitida se se atender à geometria da figura 6.18, ou seja

$$F^r = F^t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta \quad (6.37)$$

$$F^a = F^t \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \delta \quad (6.38)$$

em que  $\alpha$  representa o ângulo de pressão. Por outro lado, a força resultante pode ser determinada do seguinte modo

$$F = \frac{F^t}{\cos \alpha} \quad (6.39)$$

A figura 6.19 mostra as diferentes componentes da força que se desenvolve no engrenamento em engrenagens exteriores cónicas de dentes retos, bem como as principais variáveis geométricas em jogo.

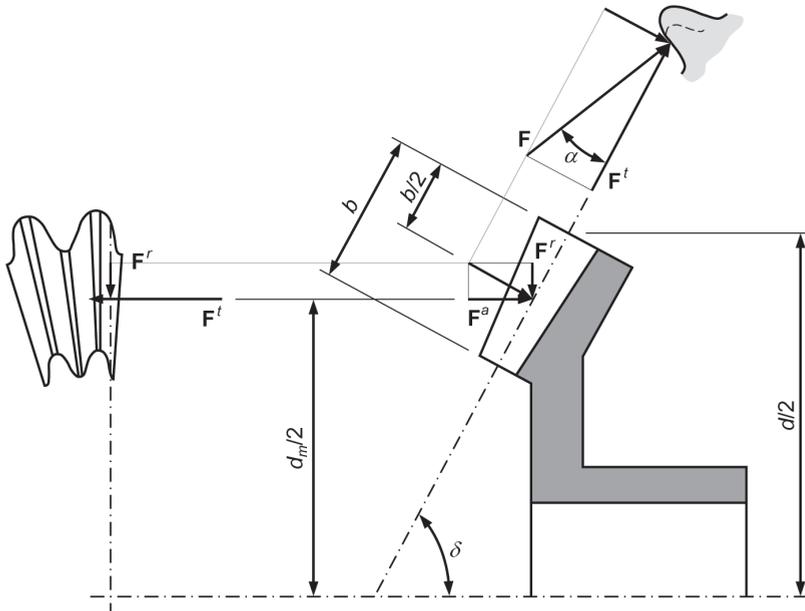


Figura 6.19 - Forças de engrenamento em engrenagens exteriores cónicas de dentes retos.

# CINEMÁTICA E DINÂMICA DE ENGRENAGENS

## TEORIA E EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

### Sobre o Livro

O principal objetivo desta obra é o de apresentar os princípios fundamentais para o estudo cinemático e dinâmico de engrenagens.

Os temas abordados neste livro estão divididos em seis capítulos. Numa primeira fase, expõem-se os conceitos básicos e gerais sobre engrenagens, onde se apresentam os tipos de engrenagens, as suas aplicações, a geração dos perfis dos dentes, o princípio fundamental do engrenamento, entre outros. Posteriormente, são analisados os principais tipos de engrenagens, que vão desde as engrenagens mais simples, até às mais complexas e onde se discutem os principais parâmetros de desempenho, tais como a continuidade do engrenamento, o rendimento, a problemática das interferências, etc. Finalmente, é apresentada a análise dinâmica de engrenagens, vulgo análise de forças, que visa o cálculo dos dentes, o dimensionamento dos veios, bem como a seleção dos apoios para veios.

Para além dos aspetos mais teóricos, este livro contém ainda um vasto leque de exercícios de aplicação resolvidos, assim como um conjunto de exercícios de revisão de conhecimentos. Trata-se, pois, de um texto de apoio a professores e estudantes do ensino superior, que poderá ser também útil para aqueles que se interessam pelas temáticas relacionadas com as engrenagens.

### Sobre os autores

**Paulo Flores** é Professor Catedrático no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho. Licenciado (1997), doutorado (2005) e agregado (2011) em Engenharia Mecânica pela Universidade do Minho. Realizou pós-doutoramentos no *Swiss Federal Institute of Technology, ETH-Zurich* (2009) e na *The University of Arizona, EUA* (2012). Paulo Flores foi distinguido com mais de duas dezenas de prémios científicos nacionais e internacionais. Preside, desde 2014, à Comissão Técnica sobre Dinâmica de Sistemas Mecânicos da Federação Internacional para a Promoção da Ciência de Máquinas e Mecanismos (IFTToMM). Paulo Flores é autor e coautor de várias centenas de publicações científicas, técnicas e pedagógicas. Desenvolve as suas atividades científico-pedagógicas no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho e no centro de investigação e desenvolvimento em Microsistemas Eletromecânicos (CMEMS-UMinho), classificado como Excelente.

**José Gomes** é Professor Associado no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho. Licenciado (1984) e doutorado (1997) em Engenharia Mecânica pela Universidade de Coimbra e pela Universidade do Minho, respetivamente. É responsável pelo Laboratório de Órgãos de Máquinas e Tribologia da Universidade do Minho. José Gomes é autor e coautor de várias dezenas de publicações científicas, técnicas e pedagógicas. Desenvolve as suas atividades científico-pedagógicas no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho e no centro de investigação e desenvolvimento em Microsistemas Eletromecânicos (CMEMS-UMinho), classificado como Excelente.



ISBN: 978-989-723-137-7

