

CADERNOS DE MATEMÁTICA N° 7

# VECTORES

## CADERNOS DE MATEMÁTICA

N.º 1 PRIMITIVAS

N.º 2 SÉRIES

N.º 3 LIMITES

N.º 4 DERIVADAS

N.º 5 INTEGRAIS

N.º 6 MATRIZES

N.º 7 VECTORES

Os Autores escrevem de acordo com a antiga ortografia.

**Título:** CADERNOS DE MATEMÁTICA NR. 7 – VECTORES

**Autor:** António Monteiro e Isabel Matos

**Editor:** Edições Orion  
Apartado 7501  
Alfragide  
2721-801 Amadora  
[www.edorion.com](http://www.edorion.com)

**Capa:** Joana Torgal | Canto Redondo

**Ilustrações:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.

**Arranjo gráfico e Fotocomposição:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.

**Impressão e Acabamentos:** Cafileza, Venda do Pinheiro

**ISBN:** 978-972-8620-32-5

**Depósito Legal n.º** 433163/17

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, fotografia, offset, etc.) sem o consentimento escrito do Editor, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos.

1.<sup>a</sup> Edição – Outubro de 2017

---

António Monteiro  
Isabel Matos

CADERNOS DE MATEMÁTICA N.º 7

# VECTORES

EDIÇÕES ORION



# Índice

Índice	v
Apresentação	vii
Capítulo 1	
Introdução	1
Capítulo 2	
Espaços Vectoriais	5
Capítulo 3	
Subespaços Vectoriais	65
Capítulo 4	
Aplicações Lineares	123
Capítulo 5	
Valores e Vectores Próprios	199
Capítulo 6	
Produtos Internos	237
Anexo 1	
O Princípio de Indução Matemática	321

Anejo 2	
Matrizes	327
Anejo 3	
Resolução de equações	333
Anejo 4	
Soluções dos exercícios propostos	341
Bibliografia	505



# Apresentação

## Os Cadernos de Matemática

O presente paradigma do processo de ensino e aprendizagem aponta cada vez mais para um trabalho pessoal de cada estudante, correspondente a uma diminuição do trabalho de exposição sistemática ou de resolução repetitiva de exercícios em aula. Desse modo, pretende-se que os estudantes adquiram capacidades de compreensão, de pesquisa e de resolução de problemas, visando a máxima possível autonomia, em cada patamar da sua evolução.

Como é natural, esse esforço individual que se pede aos estudantes modernos necessita de ser apoiado por diversas formas, uma das quais consiste na disponibilização de elementos de estudo adequados aos seus interesses e às suas necessidades.

No caso da Matemática, é bem sabido que diferentes grupos de estudantes terão interesses de níveis distintos. Enquanto a uns interessará aprofundar o mais possível os assuntos, quem sabe se com vista a uma carreira nessa mesma área, a nível superior, nomeadamente no plano da investigação científica, outros, que se dedicam a outras áreas do saber, da Engenharia ou da Economia, à Biologia ou à Linguística, estão fundamentalmente preocupados em compreender as noções e a saber aplicá-las na resolução de problemas das respectivas especialidades.

Aos primeiros destinam-se os tratados clássicos, as obras fundamentais dos grandes matemáticos; os segundos procuram muitas vezes bibliografia mais dirigida às suas preocupações em que, sem evidentemente descuidar o rigor, se procure a clareza da explicação, a apresentação de exemplos que indubitavelmente ilustrem os assuntos tratados e se forneça uma lista equilibrada de problemas e exercícios que permitam a cada leitor desenvolver as suas capacidades para os atacar e resolver, ao mesmo tempo que constituem uma forma valiosa de auto-avaliação.

É nesse sentido que aponta a presente colecção de livros, sob a designação genérica de Cadernos de Matemática. Com ela os autores visam apoiar e auxiliar os estudantes no seu esforço individual de preparação. Cada volume abordará um assunto restrito e bem delimitado, recaindo a escolha dos temas a tratar nos assuntos que são tratados na generalidade dos cursos superiores que englobam a área científica da Matemática, ao nível dos seus primeiros anos.

A matéria é exposta de forma clara, incluindo-se, sempre que possível, motivações para o aparecimento dos diferentes conceitos e bem assim áreas de aplicação dos mesmos a diversas áreas, dentro mas também e especialmente fora da Matemática. A apresentação dos aspectos teóricos é complementada e acompanhada a par e passo por numerosos exemplos ilustrativos, devidamente explicados e explorados, após os quais são propostos exercícios, sempre acompanhados pelas respectivas resoluções, mais ou menos desenvolvidas, consoante a natureza dos mesmos.

A exposição da matéria será acompanhada, sempre que conveniente, por referências bibliográficas facilmente acessíveis, através das quais os leitores mais interessados poderão aprofundar os seus estudos e conseqüentemente alargar os seus conhecimentos.

Esperamos, com a presente colecção, ir ao encontro de reais necessidades de estudantes e professores, no apoio dos seus trabalhos escolares, na área da Matemática, ao nível do ensino superior. Os autores ficarão muito gratos aos colegas que lhes queiram transmitir as suas impressões, comentários e sugestões, no sentido de se poder melhorar, de volume para volume, os conteúdos e formatos idealizados.



O estudo dos **espaços vectoriais** é o objecto da Álgebra Linear, cujos conceitos, juntamente com a linguagem das Matrizes, encontram ampla aplicação, não só nas áreas da Geometria e da Análise Matemática, mas também noutras como a Estatística, a Computação, as Ciências Sociais, etc.

A noção de espaço vectorial nasce a partir da Geometria Analítica, fundada em meados do século XVII por René Descartes e Pierre de Fermat, em que os pontos do plano ou do espaço eram identificados através de listas de coordenadas e as figuras geométricas definidas por meio de equações envolvendo essas coordenadas. Já no início do século XIX, Bernard Bolzano introduziu operações com pontos, rectas e planos, antecipando o conceito abstracto de **vector**; a ideia de segmento orientado foi desenvolvida por Giusto Bellavitis e, mais tarde, por Jean-Robert Argand e William Hamilton.

A introdução da notação matricial por Arthur Cayley, em meados do século XIX, permitiu um tratamento simplificado das **aplicações lineares**, enquanto conceitos como o de **independência linear** e **dimensão** se devem em grande parte aos trabalhos de Hermann

Grassmann. A definição moderna de “espaço vectorial” e de “aplicação linear” foi inicialmente introduzida por Giuseppe Peano, em 1888.

Do estudo dos espaços vectoriais haveria de resultar, já no século XX, a consideração de espaços de funções, através de trabalhos de Henri Lebesgue, Stefan Banach, David Hilbert, etc.



Ao nível a que é apresentado no presente volume, o assunto não requer conhecimentos prévios, excepto os que são usualmente obtidos ao longo do ensino secundário, nomeadamente no manuseamento de polinómios e no que se refere à resolução de equações algébricas. Exceptua-se um ou outro exemplo, em que se usam integrais ou outros conceitos mais avançados.

Para se compreender e dominar estes tópicos – tal como a generalidade dos tópicos da Matemática –, não basta ler e compreender as definições e principais teoremas. Há que ganhar um considerável desembaraço na utilização de umas e outros, o que só se consegue com persistência e trabalho, nomeadamente através do tratamento de exercícios práticos. É por esse motivo que neste volume – como noutros da mesma colecção – a exposição da teoria é acompanhada a par e passo pela apresentação de um grande número de exercícios, de dificuldade variável, todos integralmente resolvidos.

**Nota Importante:** No presente volume, trabalhar-se-á fundamentalmente com números reais ou complexos, embora a teoria seja apresentada com a possível generalidade, em particular falando em elementos de um corpo qualquer (ver Monteiro, A. & Matos, I. T., *Álgebra – um primeiro curso*, Escolar Editora, 1995). Por outro lado, essencialmente na resolução de exercícios, utilizaram-se livremente técnicas do cálculo matricial (ver Monteiro, A., Matos, I. T. & Miranda, V., *Matrizes*, ed. Orion, 2016).

