

CADERNOS DE MATEMÁTICA N° 3

# LIMITES

# CADERNOS DE MATEMÁTICA

N.º 1 PRIMITIVAS

N.º 2 SÉRIES

N.º 3 LIMITES

**Título:** CADERNOS DE MATEMÁTICA NR. 3 – LIMITES

**Autor:** António Monteiro, Isabel Matos e Virgínia Miranda

**Editor:** Edições Orion  
Apartado 7501  
Alfragide  
2721-801 Amadora  
[www.edorion.com](http://www.edorion.com)

**Capa:** Joana Torgal | Canto Redondo

**Ilustrações:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.

**Arranjo gráfico e Fotocomposição:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.

**Impressão e Acabamentos:** Cafilesa, Venda do Pinheiro

**ISBN:** 978-972-8620-27-1

**Depósito Legal n.º** 389655/15

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, fotografia, offset, etc.) sem o consentimento escrito do Editor, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos.

1.<sup>a</sup> Edição – Março de 2015

---

António Monteiro  
Isabel Matos  
Virgínia Miranda

*com a colaboração de*

Maria Adelaide Carreira e Vasco Simões

CADERNOS DE MATEMÁTICA N.º 3

# LIMITES

EDIÇÕES ORION



# Índice

Índice	v
Apresentação	VII
Capítulo 1	
Introdução	1
Capítulo 2	
Sucessões de números reais	3
Capítulo 3	
Limites de sucessões de números reais	19
Capítulo 4	
Limites de funções reais de uma variável real	81
Capítulo 5	
Continuidade [1.ª parte]	117
Capítulo 6	
Limites de funções reais de várias variáveis reais	145
Capítulo 7	
Continuidade [2.ª parte]	173

Aneko 1	
O Princípio de Indução Matemática	185
Aneko 2	
A Regra de Cauchy	189
Aneko 3	
Assíntotas	199
Aneko 4	
A regra de Ruffini	215
Aneko 5	
Soluções dos exercícios propostos	221
Aneko 6	
Definições, teoremas e formulário	249
Bibliografia	259

# Apresentação

## Os Cadernos de Matemática

O presente paradigma do processo de ensino e aprendizagem aponta cada vez mais para um trabalho pessoal de cada estudante, correspondente a uma diminuição do trabalho de exposição sistemática ou de resolução repetitiva de exercícios em aula. Desse modo, pretende-se que os estudantes adquiram capacidades de compreensão, de pesquisa e de resolução de problemas, visando a máxima possível autonomia, em cada patamar da sua evolução.

Como é natural, esse esforço individual que se pede aos estudantes modernos necessita de ser apoiado por diversas formas, uma das quais consiste na disponibilização de elementos de estudo adequados aos seus interesses e às suas necessidades.

No caso da Matemática, é bem sabido que diferentes grupos de estudantes terão interesses de níveis distintos. Enquanto a uns interessará aprofundar o mais possível os assuntos, quem sabe se com vista a uma carreira nessa mesma área, a nível superior, nomeadamente no plano da investigação científica, outros, que se dedicam a outras áreas do saber, da Engenharia ou da Economia, à Biologia ou à Linguística, estão fundamentalmente preocupados em compreender as noções e em saber aplicá-las na resolução de problemas das respectivas especialidades.

Aos primeiros destinam-se os tratados clássicos, as obras fundamentais dos grandes matemáticos; os segundos procuram muitas vezes bibliografia mais dirigida às suas preocupações em que, sem evidentemente descurar o rigor, se procure a clareza da explicação, a apresentação de exemplos que indubitavelmente ilustrem os assuntos tratados e se forneça uma lista equilibrada de problemas e exercícios que permitam a cada leitor desenvolver as suas capacidades para os atacar e resolver, ao mesmo tempo que constituem uma forma valiosa de auto-avaliação.

É nesse sentido que aponta a presente coleção de livros, sob a designação genérica de Cadernos de Matemática. Com ela os autores visam apoiar e auxiliar os estudantes no seu esforço individual de preparação. Cada volume abordará um assunto restrito e bem delimitado, recaindo a escolha dos temas nos assuntos que são tratados na generalidade dos cursos superiores que englobam a área científica da Matemática, ao nível dos seus primeiros anos.

A matéria é exposta de forma clara, incluindo-se, sempre que possível, motivações para o aparecimento dos diferentes conceitos e bem assim áreas de aplicação dos mesmos a diversas áreas, dentro mas também e especialmente fora da Matemática. A apresentação dos aspectos teóricos é complementada e acompanhada a par e passo por numerosos exemplos ilustrativos, devidamente explicados e explorados, após os quais são propostos exercícios, sempre acompanhados pelas respectivas resoluções, mais ou menos desenvolvidas, consoante a natureza dos mesmos.

A exposição da matéria será acompanhada, sempre que conveniente, por referências bibliográficas facilmente acessíveis, através das quais os leitores mais interessados poderão aprofundar os seus estudos e conseqüentemente alargar os seus conhecimentos.

Esperamos, com a presente coleção, ir ao encontro de reais necessidades de estudantes e professores, no apoio dos seus trabalhos escolares, na área da Matemática, ao nível do ensino superior. Os autores ficarão muito gratos aos colegas que lhes queiram transmitir as suas impressões, comentários e sugestões, no sentido de se poder melhorar, de volume para volume, os conteúdos e formatos idealizados.



Consagramos o presente volume ao estudo de uma das noções mais importantes da Matemática, a noção de “limite”. Todo o estudo do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral, por exemplo, necessitam de se apoiar neste conceito.

O assunto será tratado basicamente em três vertentes: os limites de sucessões de números reais – primeiro passo para compreensão das secções subsequentes –, os limites de funções reais de uma só variável e os limites de funções reais de várias variáveis.

De acordo com o espírito que preside aos vários volumes desta coleção, os tópicos escolhidos e os exercícios apresentados situam-se ao nível de um primeiro curso, de nível universitário, em que estas matérias sejam abordadas. Outras extensões do conceito de limite, como por exemplo o tratamento da noção de limite num espaço topológico, não têm aqui cabimento, por transcenderem o âmbito pretendido.