CADERNOS DE MATEMÁTICA Nº 2

# SÉRIES

CADERNOS DE MATEMÁTICA

N.º 1 PRIMITIVAS
N.º 2 SÉRIES

Próximo volume dos Cadernos de Matemática:
Limites

**Título:** CADERNOS DE MATEMÁTICA NR. 2 – SÉRIES
**Autor:** António Monteiro e Isabel Matos
**Editor:** Edições Orion
Apartado 7501
Alfragide
2721-801 Amadora
www.edorion.com

**Capa:** Joana Torgal | Canto Redondo
**Ilustrações:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.
**Arranjo gráfico e Fotocomposição:** A. Faria – Edição Electrónica Lda.
**Impressão e Acabamentos:** Cafilesa, Venda do Pinheiro

**ISBN:** 978-972-8620-26-4
**Depósito Legal n.º** xxxxxx/14



1.ª Edição – Setembro de 2014

António Monteiro
Isabel Matos
*com a colaboração de*
Maria Adelaide Carreira e Vasco Simões

CADERNOS DE MATEMÁTICA N° 2

# SÉRIES

EDIÇÕES ORION

# Índice

# Apresentação

## Os Cadernos de Matemática

O presente paradigma do processo de ensino e aprendizagem aponta cada vez mais para um trabalho pessoal de cada estudante, correspondente a uma diminuição do trabalho de exposição sistemática ou de resolução repetitiva de exercícios em aula. Desse modo, pretende-se que os estudantes adquiram capacidades de compreensão, de pesquisa e de resolução de problemas, visando a máxima possível autonomia, em cada patamar da sua evolução.

Como é natural, esse esforço individual que se pede aos estudantes modernos necessita de ser apoiado por diversas formas, uma das quais consiste na disponibilização de elementos de estudo adequados aos seus interesses e às suas necessidades.

No caso da Matemática, é bem sabido que diferentes grupos de estudantes terão interesses de níveis distintos. Enquanto a uns interessará aprofundar o mais possível os assuntos, quem sabe se com vista a uma carreira nessa mesma área, a nível superior, nomeadamente no plano da investigação científica, outros, que se dedicam a outras áreas do saber, da Engenharia ou da Economia, à Biologia ou à Linguística, estão fundamentalmente preocupados em compreender as noções e a saber aplicá-las na resolução de problemas das respectivas especialidades.

Aos primeiros destinam-se os tratados clássicos, as obras fundamentais dos grandes matemáticos; os segundos procuram muitas vezes bibliografia mais dirigida às suas preocupações em que, sem evidentemente descurar o rigor, se procure a clareza da explicação, a apresentação de exemplos que indubitavelmente ilustrem os assuntos tratados e se forneça uma lista equilibrada de problemas e exercícios que permitam a cada leitor desenvolver as suas capacidades para os atacar e resolver, ao mesmo tempo que constituem uma forma valiosa de auto-avaliação.

É nesse sentido que aponta a presente colecção de livros, sob a designação genérica de Cadernos de Matemática. Com ela os autores visam apoiar e auxiliar os estudantes no seu esforço individual de preparação. Cada volume abordará um assunto restrito e bem delimitado, recaindo a escolha dos temas a tratar nos assuntos que são focados na generalidade dos cursos superiores que englobam a área científica da Matemática, ao nível dos seus primeiros anos.

A matéria é exposta de forma clara, incluindo-se, sempre que possível, motivações para o aparecimento dos diferentes conceitos e suas aplicações a diversas áreas, dentro mas também e especialmente fora da Matemática. A apresentação dos aspectos teóricos é complementada e acompanhada a par e passo por numerosos exemplos ilustrativos, devidamente explicados e explorados, após os quais são propostos exercícios, sempre acompanhados pelas respectivas resoluções, mais ou menos desenvolvidas, consoante a natureza dos mesmos.

A exposição da matéria será acompanhada, sempre que conveniente, por referências bibliográficas facilmente acessíveis, através das quais os leitores mais interessados poderão aprofundar os seus estudos e consequentemente alargar os seus conhecimentos.

Esperamos, com a presente colecção, ir ao encontro de reais necessidades de estudantes e professores, no apoio dos seus trabalhos escolares, na área da Matemática, ao nível do ensino superior. Os autores ficarão muito gratos aos colegas que lhes queiram transmitir as suas impressões, comentários e sugestões, no sentido de se poder melhorar, de volume para volume, os conteúdos e formatos idealizados.

No presente volume dos Cadernos de Matemática serão tratados os aspectos mais elementares da Teoria das Séries Numéricas e das Séries de Potências. Como é natural, o assunto ficará longe de se esgotar; entre outras áreas não abrangidas aqui incluem-se o produto de séries, as séries de números complexos, as séries de Fourier, etc. Estes assuntos poderão procurar-se por exemplo nas sugestões bibliográficas fornecidas.

A matéria de facto contemplada corresponde grosso modo à que faz parte dos programas habituais dos cursos de licenciatura em que o tópico “Séries” é abordado, permitindo aos leitores um domínio adequado do assunto, a esse nível. Uma vez compreendidas as noções basilares – nesta ou noutra área da Matemática – torna-se fácil assimilar outras semelhantes ou subsequentes, mediante o investimento de um esforço pessoal de estudo e exercitação.

# Nota histórica

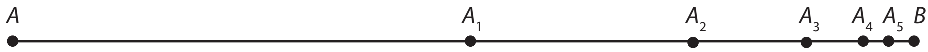
O conceito matemático de limite foi um dos que mais demoraram a ser formalizados em termos rigorosos.

Os matemáticos gregos utilizavam já uma ideia intuitiva de limite. Foi, por exemplo, por meio de uma utilização intuitiva desse conceito que Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) desenvolveu o método de exaustão – a partir dos trabalhos de Antifonte o Sofista –, com o qual obteve importantes resultados sobre áreas de figuras planas e volumes de sólidos.

No entanto, a falta de uma definição rigorosa – que só viria a ser atingida cerca de dois mil anos mais tarde, com os trabalhos de Newton e Leibniz, por exemplo, embora descobertas do início do século XX permitam supor que Arquimedes (287-212 a.C.) já se teria aproximado bastante dos mesmos conceitos – conduziu alguns pensadores clássicos a conclusões incorrectas.

Ficaram célebres os chamados paradoxos de Zenão. Natural de Eleia (490/485-430? a.C.) e discípulo de Parménidas, Zenão pretendia defender a posição filosófica da escola eleática, segundo a qual a divisibilidade e o movimento não passam de ilusões. Para o efeito, imaginou um certo número de argumentos que, conduzindo a conclusões paradoxais, pareciam sustentar aquela tese. Um desses paradoxos pode enunciar-se do seguinte modo:

Imaginemos que uma pessoa se desloca em linha recta e a velocidade constante, de um ponto $A$ até um ponto $B$; certamente que, antes de atingir o ponto $B$, tem de passar pelo ponto médio do segmento de recta $[AB]$, que poderemos designar por $A_1$, levando, para isso um certo tempo, digamos uma hora; uma vez chegado ao ponto $A_1$, a pessoa em causa levará $1/2$ de uma hora para andar desde $A_1$ até ao ponto médio do segmento de recta $[A_1B]$ (não esquecendo que se desloca a velocidade constante), que designaremos por $A_2$; seguidamente, levará $1/4$ de uma hora para ir de $A_2$ até ao ponto médio $A_3$ do segmento de recta $[A_2B]$ e assim sucessivamente.




Deste modo, o movimento decompor-se-ia numa infinidade de deslocações parcelares e o tempo necessário para as completar a todas seria a soma dos tempos necessários para percorrer cada troço, ou seja

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Defendia Zenão que, tratando-se da soma de uma infinidade de parcelas positivas, o total deveria forçosamente ser infinito, concluindo daqui que para ir de $A$ até $B$ o caminhante levaria uma infinidade de tempo. Isso era, evidentemente, absurdo, dado que, a velocidade constante, se a primeira metade do percurso ocupava uma hora, a totalidade levaria precisamente duas horas!

Uma formulação mais rigorosa do problema mostrará que, na realidade, é lícito afirmar que a soma acima indicada é igual a 2 horas, não havendo pois qualquer contradição. Para isso, desenvolveremos a teoria das séries, nascida das diligências de importantes matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e outros, sendo de notar que o português José Anastácio da Cunha (1744-1787) é considerado por muitos como precursor dos mesmos estudos, tendo formulado rigorosamente pela primeira vez, em 1790, a definição de série convergente.